

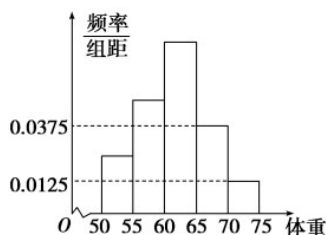
高三数学练习卷

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分．不需要写出解答过程，请把答案直接填在答题卡相应位置上．

1. 已知集合 $A = \{x | 0 < x < 2\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cap B =$ ▲.

2. 设 i 是虚数单位, 复数 $z = \frac{a-i}{2i}$ 的模为 1, 则正数 a 的值为 ▲.

3. 为了解某团战士的体重情况, 采用随机抽样的方法. 将样本体重数据整理后, 画出了如图所示的频率分布直方图. 已知图中从左到右前三个小组频率之比为 1:2:3, 第二小组频数为 12, 则全团共抽取人数为 ▲.



(第 3 题)

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的 k 的值为 ▲.

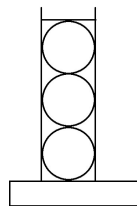
5. 设 $x \in [-1, 1]$, $y \in [-2, 2]$, 记“以 (x, y) 为坐标的点落在不等式 $x^2 + y^2 \geq 1$ 所表示的平面区域内”为事件 A , 则事件 A 发生的概率为 ▲.

6. 已知 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 所对的角分别为 A, B, C , 若 $a > b$ 且 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos C}{b}$, 则 $A =$ ▲.

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, 且 $a_2 a_4 = 4(a_3 - 1)$, 则 $a_5 =$ ▲.

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 2, & x \leq 1, \\ \log_a(x-1), & x > 1, \end{cases}$ 若 $f[f(0)] = 2$, 则实数 a 的值是 ▲.

9. 如图, 在一个圆柱形容器内盛有高度为 8cm 的水, 若放入三个相同的球 (球的半径与圆柱的底面半径相同) 后, 水恰好淹没最上面的球, 则此圆柱底面的半径是 ▲ cm.

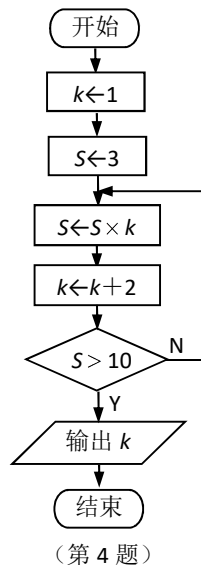


(第 9 题)

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 A, F 分别为椭圆

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 的右顶点和右焦点, 过坐标原点 } O \text{ 的直}$$

线交椭圆 C 于 P, Q 两点, 线段 AP 的中点为 M , 若 Q, F, M 三点共线, 则椭圆 C 的离心率为 ▲.

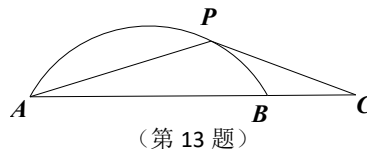


(第 4 题)

11. 设函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 若 $x_1 x_2 < 0$, 且 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 则 $|x_2 - x_1|$ 的取值范围是 ▲ .

12. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-4)^2 = 10$ 上存在两点 A, B , P 为直线 $x=5$ 上的一个动点, 且满足 $AP \perp BP$, 则点 P 的纵坐标取值范围是 ▲ .

13. 如图, 已知 P 是半径为 2, 圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的一段圆弧 AB 上一点, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$ 的最小值为 ▲ .



14. 已知实数 a, b, c 满足 $e^{a+c} + e^{2b-c-1} \leq a + 2b + 1$ (e 为自然对数的底数), 则 $a^2 + b^2$ 的最小值是 ▲ .

二、解答题: 本大题共 6 小题, 共计 90 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 14 分)

已知向量 $\mathbf{a} = (\sin \theta, \cos \theta - 2 \sin \theta)$, $\mathbf{b} = (1, 2)$.

(1) 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 求 $\frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}$ 的值;

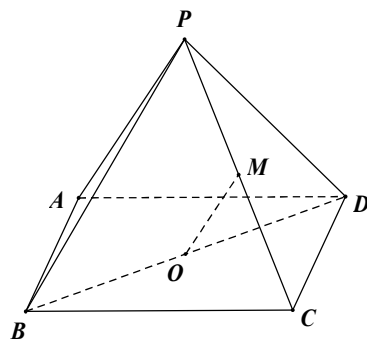
(2) 若 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, $0 < \theta < \pi$, 求 θ 的值.

16. (本小题满分 14 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形, 平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$, $PB = PD$, $PA \perp PC$, $CD \perp PC$, O, M 分别是 BD, PC 的中点, 连结 OM .

求证: (1) $OM \parallel$ 平面 PAD ;

(2) $OM \perp$ 平面 PCD .



17. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, P 是

椭圆 C 上的一个动点, 且 $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设斜率不为零的直线 PF_2 与椭圆 C 的另一个交点为 Q , 且 PQ 的垂直平分线

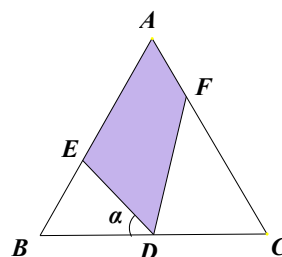
交 y 轴于点 $T(0, \frac{1}{8})$, 求直线 PQ 的斜率.

18. (本小题满分 16 分)

如图为一块边长为 2km 的等边三角形地块 ABC , 为响应国家号召, 现对这块地进行绿化改造, 计划从 BC 的中点 D 出发引出两条成 60° 角的线段 DE 和 DF , 与 AB 和 AC 围成四边形区域 $AEDF$, 在该区域内种上草坪, 其余区域修建成停车场, 设 $\angle BDE = \alpha$.

(1) 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, 求绿化面积;

(2) 试求地块的绿化面积 $S(\alpha)$ 的取值范围.



(第 18 题)

19. (本小题满分 16 分)

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 A_n , 且 $A_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 数列 $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 它的前 n 项和记为 B_n . 若 $a_1 = b_1 \neq 0$, 且存在不小于 3 的正整数 k, m , 使 $a_k = b_m$.

(1) 若 $a_1 = 1, a_3 = 5$, 求 a_2 ;

(2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列;

(3) 若 $q = 2$, 是否存在整数 m, k , 使 $A_k = 86B_m$, 若存在, 求出 m, k 的值; 若不存在, 说明理由.

20. (本小题满分 16 分)

若函数 $f(x) + g(x)$ 和 $f(x) \cdot g(x)$ 同时在 $x = t$ 处取得极小值, 则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为一对“ $P(t)$ 函数”.

(1) 试判断 $f(x) = x$ 与 $g(x) = x^2 + ax + b$ 是否是一对“ $P(1)$ 函数”;

(2) 若 $f(x) = e^x$ 与 $g(x) = x^2 + ax + 1$ 是一对“ $P(t)$ 函数”.

①求 a 和 t 的值;

②若 $a < 0$, 若对于任意 $x \in [1, +\infty)$, 恒有 $f(x) + g(x) < m \cdot f(x)g(x)$, 求实数 m 的取值范围.