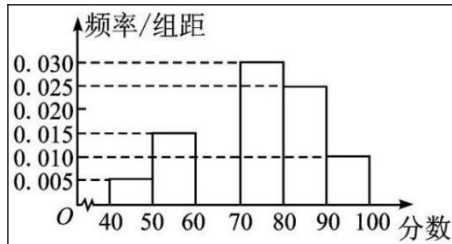


江苏省仪征中学 2021-2022 学年第一学期高二 10 月学情检测

数学

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分），在每小题所给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

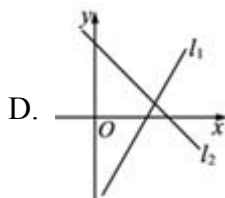
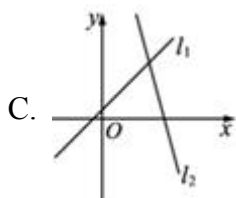
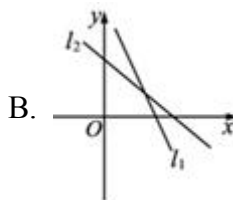
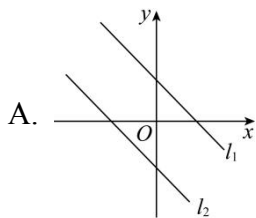
- 过点 $M(-2, a)$, $N(a, 4)$ 的直线的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 则 $|MN| = (\quad)$
 A. 10 B. 180 C. $6\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{5}$
- 若直线 l 的斜率 $k \in [-1, \sqrt{3}]$, 则直线倾斜角 α 的范围是 $(\quad)$
 A. $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ B. $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$
 C. $[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}]$ D. $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$
- 设向量 $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (1, -\sqrt{3})$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则向量 $\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $(\quad)$
 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
- 关于 x 的不等式 $-x^2 + 4ax - 3a^2 \geq 0 (a > 0)$ 的解集为 $[x_1, x_2]$, 则 $x_1 + x_2 + \frac{3a}{x_1 x_2}$ 的最小值是 $(\quad)$
 A. 4 B. $2\sqrt{6}$ C. 2 D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
- 函数 $f(x) = \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 $(\quad)$
 A. 4π B. 2π C. π D. $\frac{\pi}{2}$
- 从点 $P(m, 3)$ 向圆 $C: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$ 引切线, 则切线长的最小值为 $(\quad)$
 A. $2\sqrt{6}$ B. $\sqrt{26}$ C. $4 + \sqrt{2}$ D. 5
- 以圆 $C_1: x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ 相交的公共弦为直径的圆的方程为 $(\quad)$
 A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$
 C. $(x+\frac{3}{5})^2 + (y+\frac{6}{5})^2 = \frac{4}{5}$ D. $(x-\frac{3}{5})^2 + (y-\frac{6}{5})^2 = \frac{4}{5}$
- 某城市在进行创建文明城市的活动中, 为了解居民对“创建文明城”的满意程度, 组织居民给活动打分(分数为整数, 满分 100 分), 从中随机抽取一个容量为 240 的样本, 发现所给数据均在 $[40, 100]$ 内. 现将这些分数分成以下 6 组并画出样本的频率分布直方图, 但不小心污损了部分图形, 如下图所示, 则下列说法中错误的是 $(\quad)$



- 第三组的频数为 36 人
- 根据频率分布直方图估计众数为 75 分
- 根据频率分布直方图估计样本的平均数为 73.5 分
- 根据频率分布直方图估计样本的中位数为 70 分

二、多选题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分），在每小题所给出的四个选项中，每题有两项或两项以上的正确答案，选对得 5 分，漏选得 2 分，不选或错选得 0 分。

9. 已知直线 $l_1: ax - y - b = 0$, $l_2: bx - y + a = 0$, 当 a, b 满足一定的条件时，它们的图形可以是()



10. 下列结论错误的是()

A. 过点 $A(1,3)$, $B(-3,1)$ 的直线的倾斜角为 30°

B. 若直线 $2x - 3y + 6 = 0$ 与直线 $ax + y + 2 = 0$ 垂直，则 $a = -\frac{3}{2}$

C. 直线 $x + 2y - 4 = 0$ 与直线 $2x + 4y + 1 = 0$ 之间的距离是 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. 已知 $A(2,3)$, $B(-1,1)$, 点 P 在 x 轴上，则 $|PA| + |PB|$ 的最小值是 5

11. 下列命题正确的有()

A. 若方程 $x^2 + y^2 + mx - 2y + 3 = 0$ 表示圆，则 m 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

B. 若圆 C 的半径为 1，圆心在第一象限，且与直线 $4x - 3y = 0$ 和 x 轴都相切，则该圆的标准方程是 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

C. 已知点 $P(x,y)$ 在圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$ 上， $\frac{y}{x}$ 的最大值为 1

D. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$ 和 $C_2: x^2 + y^2 - 10x - 12y + 45 = 0$ ，圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{7}$

12. 给出下列四个结论，其中正确的结论是()

A. 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$;

B. 若函数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ 是定义在区间 $[a-2, b]$ 上的偶函数，则 $b = 2$;

C. 已知函数 $y = \log_a(2 - ax)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，则 a 的取值范围是 $(1,2)$;

D. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内有 1010 个零点，则函数 $f(x)$ 的零点个数为 2021

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知复数 $z = \frac{i(1-3i)}{1+i}$ ，则复数 $\bar{z}$ 的虚部为_____.

14. 两圆 $x^2 + y^2 = 1$, $(x+4)^2 + (y-a)^2 = 25$ 相切，则实数 $a =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = f(x) + x + a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点，则 a 的取值范围是_____.

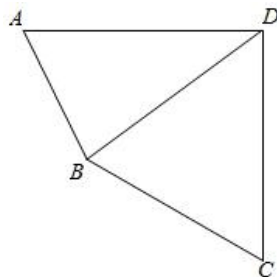
16. 已知实数 x_1, x_2, y_1, y_2 满足: $x_1^2 + y_1^2 = 1, x_2^2 + y_2^2 = 1, x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为_____.

四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分) 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = 90^\circ, \angle A = 45^\circ, AB = 2, BD = 5$.

(1) 求 $\cos \angle ADB$;

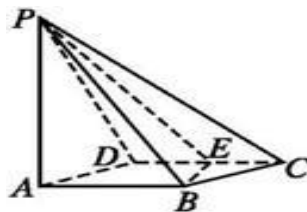
(2) 若 $DC = 2\sqrt{2}$, 求 BC .



18. (本小题满分 12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, $\angle BCD = 60^\circ$, E 是 CD 的中点, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = \sqrt{3}$.

(1) 求证: 平面 $PBE \perp$ 平面 PAB ;

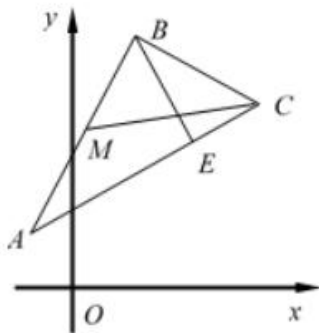
(2) 求二面角 $A-BE-P$ 的大小



19. (本小题满分 12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $A(-1, 2)$, 边 AC 上的高 BE 所在的直线方程为 $7x + 4y - 46 = 0$, 边 AB 上中线 CM 所在的直线方程为 $2x - 11y + 54 = 0$.

(1) 求点 C 坐标;

(2) 求直线 BC 的方程.



20. (本小题满分 12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y + F = 0$, 且圆 C 被直线 $x - y + 3 + \sqrt{2} = 0$ 截得的弦长为 2.

(1) 求圆 C 的标准方程;

(2) 若圆 C 的切线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距相等, 求切线 l 的方程;

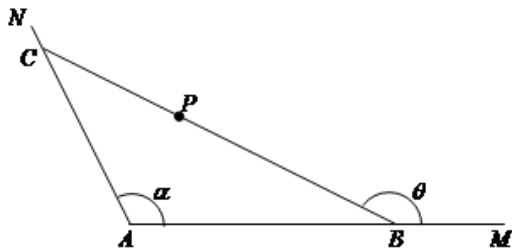
(3) 若圆 $D: (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 2$ 上存在点 P , 由点 P 向圆 C 引一条切线, 切点为 M , 且满足 $PM = \sqrt{2}PO$, 求实数 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分) 公路 AM , AN 围成的是一块顶角为 α 的角形耕地, 其中 $\tan \alpha = -2$. 在该块土地中 P 处有一小型建筑, 经测量, 它到公路 AM , AN 的距离分别为 3km 、 $\sqrt{5}\text{km}$. 现要过点 P 修建一条直线型公路 BC , 将三条公路围成的区域 ABC 建成一个工业园, 如图.

(1) 记 $\angle CBM = \theta$, 并设 $\tan \theta = k$, 试确定 k 的取值范围;

(2) 设三角形区域工业园的占地面积为 S , 试将 S 表示成 k 的函数 $S = f(k)$;

(3) 为尽量减少耕地占用, 如何确定点 B 的位置, 使得该工业园区的面积最小? 并求最小面积.



22. (本小题满分 12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 在直线 $l: y = 7x + 4$ 上, $B(7, 3)$, 以线段 AB 为直径的圆 C (C 为圆心) 与直线 l 相交于另一个点 D , $AB \perp CD$.

(1) 求圆 C 的标准方程;

(2) 若点 A 不在第一象限内, 圆 C 与 x 轴的正半轴的交点为 P , 过点 P 作两条直线分别交圆于 M , N 两点, 且两直线的斜率之积为 -5 , 试判断直线 MN 是否恒过定点, 若是, 请求出定点的坐标; 若不是, 请说明理由.