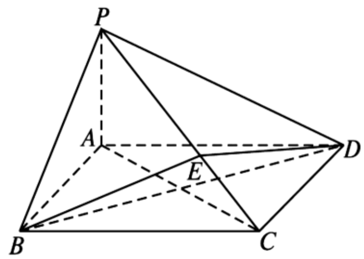
高三数学周三附加题训练 7　　2019/10/23

班级____________　姓名____________　学号___________

1.已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$.求矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.

2．如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$，点 E 在线段 PC 上，$PC\perp$平面 BDE，设 $PA=1$，$AD=2$.



(1)求平面 BPC 的法向量;

(2)求二面角 $B-PC-A$ 的正切值.

3. 口袋里装有大小相同的卡片八张，其中三张标有数字 1，三张标有数字 2，两张标有数字 3. 第一次从口袋里任意抽取一张，放回口袋后第二次再任意抽取一张，记第一次与第二次取到卡片上数字之和为 ξ.

(1) ξ 为何值时，其发生的概率最大？说明理由；

(2) 求随机变量 ξ 的期望 $E(\xi)$.

4.在平面直角坐标系 xOy 中，已知两点 M(1，－3)，N(5，1)．若点 C 的坐标满足 $\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OM}+(1-t)\overrightarrow{ON}(t\in\mathbf{R})$，且点 C 的轨迹与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A，B 两点．

(1) 求证：OA⊥OB；

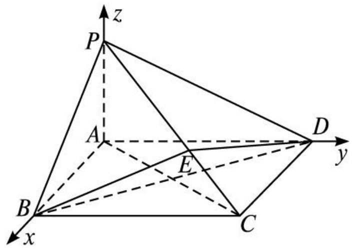
(2) 在 x 轴上是否存在一点 P(m， 0)，使得过点 P 任作一条抛物线的弦，并以该弦为直径的圆都过原点？若存在，求出 m 的值及圆心的轨迹方程；若不存在，请说明理由．

高三数学周三附加题训练 7 答案　　2019/10/23

1.解：$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

2. 以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AP}$ 的方向分别作为 x、y、z 轴的正方向建立空间直角坐标系，

如图所示．设 $AB=b$，则：



从而 $b=2$．结合(1)可得 $\overrightarrow{DB}=(2，-2, 0)$，……………4 分

是平面 APC 的法向量．

$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DB}|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}\cdot2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，……………8 分

$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\tan\theta=3$．由图可得二面角 $B-PC-A$ 的正切值为 3．……………10 分

3. 解：(1) 依题意，随机变量 ξ 的取值是 2，3，4，5，6.(2 分)

因为 $P(\xi=2)=\dfrac{3^2}{8^2}=\dfrac{9}{64}$；(3 分)

$P(\xi=3)=\dfrac{2\times3^2}{8^2}=\dfrac{18}{64}$；(4 分)

$P(\xi=4)=\dfrac{3^2+2\times3\times2}{8^2}=\dfrac{21}{64}$；(5 分)

$P(\xi=5)=\dfrac{2\times3\times2}{8^2}=\dfrac{12}{64}$；(6 分)

$P(\xi=6)=\dfrac{2\times2}{8^2}=\dfrac{4}{64}$.(7 分)

所以，当 $\xi=4$ 时，其发生的概率最大，最大值为 $P(\xi=4)=\dfrac{21}{64}$.(8 分)

(2) $E(\xi)=2\times\dfrac{9}{64}+3\times\dfrac{18}{64}+4\times\dfrac{21}{64}+5\times\dfrac{12}{64}+6\times\dfrac{4}{64}=\dfrac{15}{4}$，

所以随机变量 ξ 的期望 $E(\xi)=\dfrac{15}{4}$.(10 分)

4.(1) **证明：**由$\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OM}+(1-t)\overrightarrow{ON}(t\in\mathbf{R})$可知，点 C 的轨迹是 M，N 两点所在的直线，

所以点 C 的轨迹方程为 $y+3=\frac{1-(-3)}{4}(x-1)$，

即 $y=x-4$.(2 分)

由$\begin{cases}y=x-4,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 化简整理，得 $x^2-12x+16=0$.(3 分)

设 C 的轨迹与抛物线 $y^2=4x$ 的交点坐标为 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

所以 $x_1+x_2=12$，$x_1x_2=16$，

$y_1y_2=(x_1-4)(x_2-4)=x_1x_2-4(x_1+x_2)+16=-16$.

因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=16-16=0$，

所以 $OA\perp OB$.(5 分)

(2) **解：**假设存在这样的点 P，并设 $A'B'$是过抛物线的弦，其方程为 $x=ny+m$，$A'(x_3，y_3)$，$B'(x_4，y_4)$.

代入 $y^2=4x$，得 $y^2-4ny-4m=0$，(6 分)

此时 $y_3+y_4=4n$，$y_3y_4=-4m$，

所以 $k_{OA'}\, k_{OB'}=\frac{y_3}{x_3}\cdot\frac{y_4}{x_4}=\frac{y_3}{\frac{y_3^2}{4}}\cdot\frac{y_4}{\frac{y_4^2}{4}}=\frac{16}{y_3y_4}=-\frac{4}{m}=-1$，

所以 $m=4$(定值)，故存在这样的点 $P(4，0)$满足题意．(8 分)

设 $A'B'$的中点为 $T(x，y)$，

即 $y=\frac{1}{2}(y_3+y_4)=2n$，$x=\frac{1}{2}(x_3+x_4)=\frac{1}{2}(ny_3+4+ny_4+4)=\frac{n}{2}(y_3+y_4)+4=2n^2+4$，

消去 n，得 $y^2=2x-8$.

即 m 的值为 4，圆心的轨迹方程为 $y^2=2x-8$.(10 分)