巧用简单几何性质求解椭圆试题的优化路径

江苏省海门中学　(226100)　姜敏华

解析几何具有显见的几何性质,选取恰当的“元”及合理的变形对运算影响是巨大的,优化计算路径尤为重要.教学中要借助简单的几何性质来简化运算,优化解题路径,提升学生的数学运算及数学建模的数学核心素养.

问题 1　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点$(\sqrt{2},1)$,离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.(1)求椭圆 C 的方程;(2)设直线 $l:y=kx+t(t\neq0)$ 与椭圆 C 相交于 A,B 两点,若以 OA,OB 为邻边的平行四边形 $OAPB$ 的顶点 P 在椭圆 C 上,求证:平行四边形 $OAPB$ 的面积为定值.

分析:第(1)问易得$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$;第(2)问中如何用数量关系来刻画平行四边形这一条件,我们很自然地想到对角线互相平分,利用这一几何性质与椭圆中的中点弦联系起来,构建恰当的目标函数,再借助弦长公式,面积公式进行减元消元得到定值.我们还可用仿射变换将椭圆回归到圆,转化为定角定长求解菱形的面积,再将圆变换到椭圆中相应的面积.当然,本题求解也可以引入斜率,进而去表示点来求解.

下面针对第(2)问给出几种解法.

解法一:(设直线方程求解)直线 $l:y=kx+t(t\neq0)$ 与椭圆方程 $x^2+2y^2-4=0$ 联立得 $(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-4=0$,$\triangle=16k^2t^2-4(1+2k^2)(2t^2-4)=8(4k^2+2-t^2)$.设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,AB 的中点为 M,则 $AB=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\frac{2\sqrt{2}\sqrt{4k^2+2-t^2}}{1+2k^2}$,$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2kt}{1+2k^2}$,$y_m=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{t}{1+2k^2}$,$k_{OM}=\frac{1}{-2k}$,$l_{OP}:y=-\frac{1}{2k}x$.直线 l_{OP} 与椭圆方程 $x^2+2y^2-4=0$ 联立得 $x_P^2=\frac{8k^2}{1+2k^2}$,而且 $|x_P|=2|x_M|$,所以$\frac{8k^2}{1+2k^2}=4(\frac{-2kt}{1+2k^2})^2$,即得 $2t^2=2k^2+1$,从而弦长 $AB=\sqrt{1+k^2}\,\frac{2\sqrt{2}\sqrt{4k^2+2-t^2}}{1+2k^2}=\sqrt{1+k^2}\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3t^2}}{2t^2}$,故原点到直线 AB 的距离为 $d_{O\to AB}=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$.所以 $S_{\square OAPB}=AB\cdot d_{O\to AB}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3t^2}}{2t^2}\cdot\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{6}$,所以 $S_{\square OAPB}=AB\cdot d_{O\to AB}=\sqrt{6}$ 为定值.

解法二:(设点的坐标求解)设点 $P(x_0,y_0)$,则 $x_0^2+2y_0^2=4$,OP 的中点 $M(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2})$.由熟知的结论(2)可得 $k_{OM}k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}$,则 $k_{AB}=-\frac{x_0}{2y_0}$,所以直线 AB 的方程为 $y-\frac{y_0}{2}=-\frac{x_0}{2y_0}(x-\frac{x_0}{2})$,即 $x_0x+2y_0y-2=0$.椭圆 $x^2+2y^2=4$ 与直线 $x_0x+2y_0y-2=0$ 联立得 $x^2-x_0x+1-2y_0^2=0$,判别式 $\triangle=x_0^2-4(1-2y_0^2)=6y_0^2$,弦长 $AB=\sqrt{1+\frac{x_0^2}{4y_0^2}}\sqrt{6y_0^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x_0^2+4y_0^2}$,所以原点到直线 AB 的距离为 $d_{O\to AB}=\frac{2}{\sqrt{x_0^2+4y_0^2}}$,所以 $S_{\square OAPB}=AB\cdot d_{O\to AB}=\sqrt{6}$ 为定值.

解法三:(仿射变换)令 $u=\frac{x}{a}$,$v=\frac{y}{b}$,则 $u^2+v^2=1$,在仿射变换下平行四边形 $OAPB$ 变换为菱形 $OAPB$,菱形 $OAPB$ 的顶点 P 在单位圆上,可知 $\triangle OAP$ 为正三角形,所以 $S_{菱形OA}=OA\cdot OB\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,从而 $S_{\square OAPB}=abS_{菱形OAPB}=\sqrt{6}$ 为定值.

变式　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上有三个点 A,B,C,且 O(O 为坐标原点)为 $\triangle ABC$ 的重心.

(1)记 k_{OA},k_{BC} 分别为直线 OA,BC 的斜率,求证:$k_{OA}k_{BC}$ 为定值;

(2)求证:$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 为定值.

参考答案:(1)$k_{OA}k_{BC}=-\frac{b^2}{a^2}$,(2)$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

问题 2　已知点 A,B 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上,点 A 在第一象限,O 为坐标原点,且 $OA\perp AB$.

(1)若 $a=\sqrt{3}$,$b=1$,直线 OA 的方程为 $x-3y=0$,求直线 OB 的斜率;

(2)若 $\triangle OAB$ 是等腰三角形(点 O,A,B 按顺时针排列),求$\frac{b}{a}$的最大值.

分析:我们利用椭圆中两个熟知的结论由圆的仿射变换可知(1)直径所对的圆周角是直角如图1,过中心的弦 $k_{BA}k_{BA'}=-\frac{b^2}{a^2}$.(2)垂径定理,如图2,中点弦 $k_{AB}k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$.

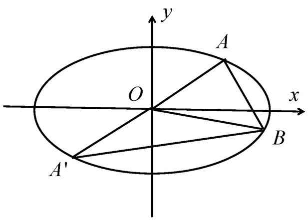

图1

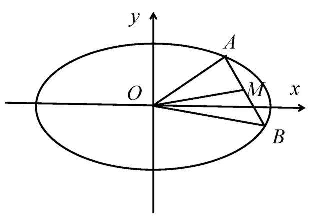

图2

解析一:优化路径(1)直径所对的圆周角是直角.

设直线 $A'OA$ 的斜率为 k,则直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{k}$,而 $\tan\angle AA'B=\frac{AB}{AA'}=\frac{1}{2}$,由直线 $A'B$ 到 $A'OA$ 的角为 $\angle AA'B$,从而得 $\tan\angle AA'B=\frac{k-k_{BA'}}{1+kk_{BA'}}=\frac{1}{2}$,所以解得 $k_{BA'}=\frac{2k-1}{k+2}$.由结论(1) $k_{BA}k_{BA'}=-\frac{b^2}{a^2}$ 可得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2k-1}{k^2+2k}$,令 $t=2k-1$,$k=\frac{t+1}{2}$,所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{4}{(t+\frac{5}{t})+6}\leqslant\frac{2}{\sqrt{5}+3}=(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2$,当且仅当 $t=\sqrt{5}$,即 $k=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 时,$\frac{b}{a}$ 取最大值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解析二:优化路径(2)垂径定理.

设直线 OA 的斜率为 k,则直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{k}$,而 $\tan\angle AOM=\frac{AM}{OA}=\frac{1}{2}$,由直线 OM 到 OA 的角为 $\angle AOM$,得 $\tan\angle AOM=\frac{k-k_{OM}}{1+kk_{OM}}=\frac{1}{2}$,所以 $k_{OM}=\frac{2k-1}{k+2}$.由结论(2) $k_{AB}k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$,可得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2k-1}{k^2+2k}$,以下同解析一.

参考文献

[1] 傅海伦.培养高中生数学建模素养的课例及分析[J].中学数学杂志,2020(11).

一道美国数学奥林匹克题的八种证法

广东省深圳中学　(518001)　邱际春

题目　如图1,BE、CF 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的两条高,以 AB 为直径的圆与直线 CF 相交于点 M、N,以 AC 为直径的圆与直线 BE 相交于点 P、Q.证明:M、N、P、Q 四点共圆.(第19届美国数学奥林匹克第5题)

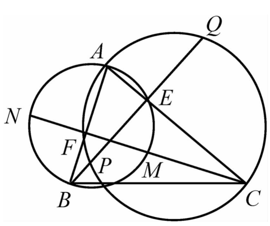

图1

从图形结构来看,此题条件精炼,结构优美,解法丰富.文[1]利用线段间的数量关系结合相交弦定理对此赛题进行了证明,文[2]分别运用三角法和解析法给出两种证法,笔者在文[3]中利用反演变换给出这一赛题的新证法,并在文[4]中通过类比和改造图形结构演绎出一些新结论.

本文从图形特征出发,利用相似三角形的性质、圆的有关性质和定理及三角代换等技巧,从而给出下面八种新的证明方法,以飨读者.

1　利用相似三角形的判定与性质证明

证法一:如图2,设 BE、CF 交于点 H,连接 BN、EM、PH、CQ.因为 BE、CF 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的两条高,所以 $\angle CFB=\angle CEB=90°$,注意到 AB 和 AC 为两圆的直径,所以点 E 和点 F 均为圆上的点.又因为 $\angle BHF=\angle CHE$,所以 $\triangle BHF\sim\triangle CEH$,所以 $\frac{BH}{CH}=\frac{HF}{HE}$.因为 $\angle BNM=\angle BEM$,$\angle BHN=\angle MHE$,所以 $\triangle BHN\sim\triangle MHE$,所以 $\frac{MH}{BH}=\frac{HE}{HN}$.因为 $\angle PFC=\angle CQP$,$\angle FHP=\angle QHC$,所以 $\triangle FHP\sim\triangle QHC$,所以 $\frac{CH}{HQ}=\frac{PH}{HF}$.以上三式相乘可得 $\frac{MH}{HQ}=\frac{PH}{HN}$.又 $\angle MHQ=\angle PHN$,所以 $\triangle PHN\sim\triangle MHQ$,所以 $\angle PNH=\angle MQH$.故 M、N、P、Q 四点共圆.

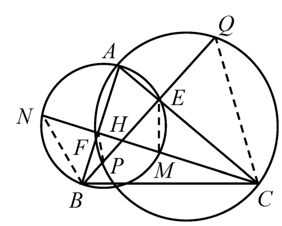

图2

证法二:如图3,设 BE、CF 交于点 H,由题设条件知 H 为垂心.连接 AH,且延长后交 BC 于点 D,则 $AH\perp BC$,即 $\angle ADB=\angle ADC=90°$.又因为 AB 和 AC 分别是两圆的直径,所以点 D 是两圆的交点.连接