

数学考试中的结构不良问题研究^①

任子朝 赵 轩

(教育部考试中心 100084)

1 结构不良试题

Reitman(1965)首次从认知心理学的角度区分了结构良好问题(well-structured problem)和结构不良问题(ill-structured problem).前者是初始状态、目标状态和算子都很明确的问题,而后者则是这三者中至少有一个没有明确界定的问题^[1].所谓算子就是解决问题的方法和途径.

应该注意的是,结构不良问题并不是这个问题本身有什么错误或是不恰当,而是指它没有明确的结构、要求或解决的途径.

结构不良问题的主要特征是:界定不明确,问题的构成存在未知或某种程度的不可知部分;目标界定含糊不清,缺少限定;具有多种解决方法、途径或根本不存在解决方法,即通常没有唯一的标准答案;具有多种评价解决方法的标准;可操控的参数、变量很多;没有原型的案例可供参考,因为案例中各重要因素在不同的情境具有显著差异,又因为这些因素是相互影响的;不能确定哪些概念、规则和原理对形成解决方案来说是必需的,又如何将它们组织起来;概念、规则和原理三者之间的关系在案例间的应用不一致;对描述或预知大多数案例没有一般性的规则或原理;在确定恰当的行动方面,没有明确的方法;需要学习者表达个人对问题的观点或信念.

学生学习中常见的试题一般都是结构良好的试题,条件不多不少,需要解决的问题目标明确,有规范的思路和解法.然而现实生活和职业生涯中的问题多是结构不良型,解决结构良好与不良这两类问题所需要的技巧和能力有所不同,也就是说可以出色地解决课堂上的结构良好问题并不能保证可以成功地解决现实生活中的结构不良问

题.结构不良问题具有条件模糊、解决方案多样、结果开放等特点,其解决过程能有效激发学生求知欲、帮助学生多角度把握问题本质、追寻知识背后的价值、形成跨学科综合解决问题的能力.因此,解决结构不良问题对考查学生的素养和能力,发挥考试的选拔功能、促进学生素养的养成和能力的提升具有深远意义.

综合 Namsoo Shin 和 David H. Jonassen 等人的研究成果^[2-3],结合数学学科和高考的特点,高考数学科对结构不良问题进行了深入的研究,数学科的结构不良问题的主要特征有:1)问题条件或数据部分缺失或冗余;2)问题目标界定不明确;3)具有多种解决方法、途径;4)具有多种评价解决方法的标准;5)所涉及的概念、规则和原理等不确定.

2 数学考试中结构不良试题的编制

在数学考试中设置结构不良问题,要综合考虑知识的选取、能力考查的层次、考生的接受程度等.下面选取数列内容,研究结构不良试题的命题技术和考查要求.

按照结构不良试题的一般定义,首先研究问题条件或数据部分缺失的问题.作为研究对象的新题型,试题不能太难,要掌握在中等难度;知识内容不能太复杂,要限制涉及的知识点数量;能力要求不能太高,也要限制考查能力的种类和层次.可以编制这样的试题:

在下面题目中,补充一个条件,使得正整数 k 的值存在,并求出 k 的值.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等比数列,且 $b_1 = a_5, b_2 = 3, b_5 = -81$. 若 $S_k > S_{k+1} < S_{k+2}$, 求 k .

^① 基金项目:国家教育考试科研规划 2019 年度课题“基于高考评价体系的应用性考查研究”(GJK2019013)

这个试题开宗明义要求学生补充一个条件,说明本题属于条件或数据缺失的结构不良问题.解答本题,首先要根据已知条件,求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,再由题目的已知条件可得 $a_5 = b_1 = -1$,又由 $a_{k+1} < 0$ 且 $a_{k+2} > 0$ 可得 k, d 之间的关系式:

$$\begin{cases} -1-4d+(k+1-1)d < 0, \\ -1-4d+(k+2-1)d > 0, \end{cases}$$

综合可得 k, d 之间的关系: $d > 0$ 且 $3 + \frac{1}{d} <$

$k < 4 + \frac{1}{d}$,因为 k 是正整数,由此得 $d > 0$ 且 $\frac{1}{d}$ 不是整数,因此当 $d > 1$ 且 $\frac{1}{d}$ 不是整数时,本题的答案都是 $k=4$.

本题在让学生自己补充条件时,没有任何的限制,学生需要推证以上的关系,然后根据对 d 的要求,补充条件,例如可以补充 $d = \frac{2}{3}, \frac{4}{15}, 3, 5, \dots$ 等.这样编拟的试题一方面可能对学生的要求过高,题目过难.另一方面也可能造成不公平,有的学生是进行了严格的推证做出的选择,但可能有的学生没有进行上面的推证,采取试错的办法,直接补充 $d = \frac{2}{3}, \frac{4}{15}, 3, 5, \dots$.这样就有的考生经过严格推证,花费了很多的时间和精力,才补充出合适的条件;有的考生不经过严格推证,经过两次验算就直接补充出合适的条件.解题过程繁简程度有差别,不能对考生进行精确的区分.为避免这些不足,可以给出几个条件,让学生自己挑选,这样既保持了结构不良试题的特点,又保证了考试的公平性.

在① $b_1 + b_3 = a_2$, ② $a_4 = b_4$, ③ $S_5 = -25$ 这三个条件中选择一个,补充在下面题目中,使得正整数 k 的值存在,并求出 k 的值.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等比数列,且 $b_1 = a_5, b_2 = 3, b_5 = -81$.若 $S_k > S_{k+1} < S_{k+2}$,求 k .

改编后的试题属于结构不良试题的改良版式,这种改良可以使考查的内容更加丰富,选择条件①可以考查等比数列的通项公式的应用,选择条件③可以考查等差数列的前 n 项和公式的应

用.但进行这样修改后,选择条件①③可以求出 k 的值,而选择条件②不能求出 k 的值.按照题目的要求,选择条件①③可以得分,选择条件②不能得分.这样就造成选择条件②的学生虽然花费了时间和精力,但却不能得分,而且回答补充条件②不能求出 k 值的过程,也需要考生理解并进行思考.为了体现对选择条件②的考生的公平,要对题目再次进行修改完善,使题目更具有开放性,无论选择哪个条件,只要进行正确解答,都能得分.同时在题目中加了一个空,表明要将条件补充到题目中.

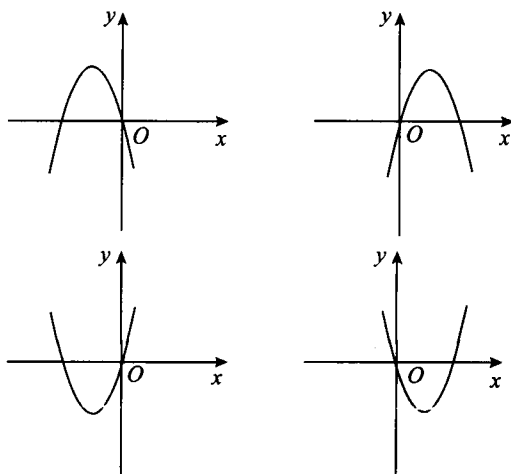
在① $b_1 + b_3 = a_2$, ② $a_4 = b_4$, ③ $S_5 = -25$ 这三个条件中任选一个,补充在下面问题中,若问题中的 k 存在,求 k 的值;若 k 不存在,说明理由.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等比数列,_____, $b_1 = a_5, b_2 = 3, b_5 = -81$,是否存在 k ,使得 $S_k > S_{k+1}$ 且 $S_{k+1} < S_{k+2}$?

通过这样的设计,目的是希望学生在具体解答题目前有初步的判断,在各种选择当中选一个自己擅长的,或自认为更有把握的,给学生搭建展示自己的平台.为避免学生在答题时忘记填写自己所选择的条件,可以在答题卡中补充下面的提示语句:

我选择的条件是_____.

就本题而言,数列的前 n 项和 $S_n = f(n)$ ($d \neq 0$)对应的函数 $y = f(x)$ 的图像是下面四种情况之一:



要使得存在 k ,使得 $S_k > S_{k+1}$ 且 $S_{k+1} < S_{k+2}$ 成立,则只可能是第四种情况,由数列的前 n 项

和 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$, 知道 a_1 和 d 应满足条件: $d > 0$, $\frac{1}{2} - \frac{a_1}{d} > \frac{3}{2}$ 且 $\frac{a_1}{d}$ 不是整数.

学生经过初步判断, 条件② $a_4 = b_4$ 对应的公差 $d < 0$, 则显然不满足条件 $S_k > S_{k+1}$ 且 $S_{k+1} < S_{k+2}$, 学生如果选择了这个条件, 将得到这个题目最简便的解答:

由 $a_4 = b_4$, 得 $d = a_5 - a_4 = -28 < 0$,

因为 $S_k > S_{k+1}$ 且 $S_{k+1} < S_{k+2}$ 等价于 $a_{k+1} < 0$ 且 $a_{k+2} > 0$, 则 $d = a_{k+2} - a_{k+1} > 0$, 与 $d = -28$ 矛盾! 所以满足条件的 k 不存在.

这个解答性价比最高, 这样也给善于思考的学生提供了展示的机会, 更好的发挥考试的区分鉴别功能.

当然给学生更多的选择后还要考虑一个问题, 即如果考生选择了一个条件, 做不下去, 浅尝辄止, 或者有的学生选择一个条件做完后, 又选择另外一个条件做了一遍, 应该如何计分? 这样就需要补充一个注释:

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

这样就使题目的要求完整严密, 避免在对试题的评分过程中产生争议.

3 结构不良试题的考查功能

在数学考试中引入、设置结构不良试题是考试内容改革的要求. 2016年, 教育部考试中心提出构建高考评价体系^[4]. 高考数学科研究了基于高考评价体系的数学科考试内容改革实施路径^[5]. 高考评价体系是基于国家人才战略的系统性人才选拔体系, 是新时代高考内容改革和命题工作的理论支撑和实践指南. 新时期高考内容改革的重要特征就是从能力立意到素养导向的转变. “从能力立意到素养导向的转变, 突出表现为考查目的从关注知识到关注人; 考核目标从常规性的问题解决技能到创造性的探究能力; 考查情境从学科知识化到真实情境化; 试题条件从结构良好到结构不良; 试题要素从单一因素到复合因素; 试题结构从碎片到整体.”^[6] 结构不良问题初始状态、目标状态、中间状态至少有一个不确定, 有利于引导学生在解决问题的过程中, 根据具体情境, 从多个角度分析, 考虑多个可能, 寻找不同

路径, 提出多种解决方法, 以考查学生思维的系统性、灵活性、深刻性、创造性.

结构不良问题设计可以选取学科内容材料, 也可以选取自然、社会等真实素材, 并对这些素材进行结构化处理, 保持其足够适当的开放性, 促进学生与真实情境之间持续而有意义的互动, 促进学生将既有知识经验和思维方法迁移到问题的解决中, 并在问题解决过程中丰富体验, 发展思维.

在教学中, 结构不良问题的设计要以主题式、项目式组织情境和问题, 为讨论式学习、合作探究式学习提供多维度思考空间, 更好地拓展学生思维广度, 更好地促进学生交流合作, 从而激发学生的思维创新能力, 提高学生的合作能力. 运用其结构不良特性, 更好地激发学生学习兴趣, 更好地培养学生发现问题、解决问题的能力, 以及应对现实挑战的创新能力和实践能力. 因此, 结构不良问题设计要根据其特性, 一方面对真实的情境进行适当地加工, 使其蕴含着有价值的问题, 期待学生从多个视角去发现、探究它; 另一方面对条件、结论、方法等问题结构要素进行合理设置, 或使条件部分呈现, 或调用的概念、原理不明确, 或解决方法多样. 当然, 因为教学有时间和空间限制, 情境过于开放、结构不良程度过大不利于特定的教学目标实现, 是不切实际的. 设问的角度要指向课堂教学目标, 做到问题开放有度、解决有法, 启发性和思考性相得益彰.

参考文献

- [1] 李同吉, 吴庆麟. 论解决结构不良问题的能力及其培养[J]. 华东师范大学教育科学学报, 2006(1): 63-68
- [2] Namsoo Shin, David H. Jonassen, Steven McGee. Predictors of Well-Structured and Ill-Structured Problem Solving in an Astronomy Simulation [J]. Journal of Research in Science Teaching, 2003, (1): 6-33
- [3] David H. Jonassen. Instructional Design Models for Well-Structured and Ill-Structured Problem-Solving Learning Outcomes [J]. Educational Technology: Research and Development, 1997, (1): 65-94
- [4] 姜钢. 论高考“立德树人、服务选拔、引导教学”的核心功能[J]. 中国高等教育, 2018(11): 31-35
- [5] 任子朝, 赵轩. 基于高考评价体系的数学科考试内容改革实施路径[J]. 中国考试, 2019(12): 27-32
- [6] 任子朝. 从能力立意到素养导向[J]. 中学数学教学参考, 2018(5): 1