

高考数学科批判性思维考查研究^①

赵 轩 任子朝 陈 昂

(教育部考试中心 100084)

习近平总书记指出：“纵观人类发展历史，创新始终是一个国家、一个民族发展的重要力量，也始终是推动人类社会进步的重要力量^[1]。”创新是发展的原动力。在信息化、全球化高速发展的当今时代，国家对创新型人才提出了新的更高的要求。作为创新型人才最重要的能力特征之一，批判性思维逐渐成为 21 世纪教育的重要目标。越来越多的人认识到其重要性，并致力于将其融入基础教育和高等教育的人才培养过程之中。

2014 年 9 月，《国务院关于深化考试招生制度改革的实施意见》明确指出深化高考考试内容改革的方向，“依据高校人才选拔要求和国家课程标准，科学设计命题内容，增强基础性、综合性，着重考查学生独立思考和运用所学知识分析问题、解决问题的能力^[2]。”引导学生在中学阶段培养独立思考和解决问题的能力，是新高考数学科内容改革的方向与目标。其中就包括对于批判性思维的考查。

批判性思维由两个维度组成，在情感态度层面包括相信理性、尊重事实、谨慎判断、公正评价、敏于探究、追求真理等一系列思维品质；在认知层面包括对概念、方法、标准、证据等要素进行阐释、分析、评价与推理等一系列技能^[3]。目前，还没有公认的统一批判性思维的定义，最广泛被使用的含义来源于 20 世纪 90 年代美国哲学学会面向心理学家、哲学家和教育研究者，运用 Delphi 方法研究的成果。该研究的结果认为批判性思维特点是：“有目的的、自律性的判断，通过这种判断得到针对它所依据的那些证据性、观念性、方法性、标准性或情境性思考的阐释、分析、评估、推导以及解释^[4]”。数学科作为重要的基础科学学科和工

具学科，对培养学生归类、论证分析、判断评价、设想多种可能性、导出结论、说明结果等批判性思维技能起到独特的作用^[5]。

在数学科高考中，强调批判性思维，就是要引导考生独立思考、树立不盲从的科学精神、清晰而有条理的分析问题，追求思维过程的合理性。近几年的数学科高考试题对于批判性思维的考查进行了有益的探索，为高等学校选拔具有较好发展潜力的新生提供了有效的参考，对中学教学培养创新意识发挥了良好的导向作用。

1 增强开放性，引导学生自主探究

在许多领域，批判性思维表现为勇于提出不同的观点和理论，从而引发人们的进一步思考。在数学学科中，发现和提出问题，通过部分已知信息对结论进行猜测，通过逻辑推理验证猜想的探究过程，就是批判性思维的具体体现。新修订的高中课程标准中，将数学探究活动列入到必修课程与选择性必修课程之中，凸现了培养学生数学自主探究能力的重要性^[6]。数学科高考主动对接课程标准的变化，通过不断增强试题的开放性，深入考查批判性思维，引导学生自主探究，培养创新精神。近几年，许多题目都展现出开放性的命题思路，不在题目中限定结论，给学生留出思考、分析、判断的空间，体现研究型学习的理念。

例 1(2018 年 I 卷文科第 17 题)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, na_{n+1} = 2(n+1) \cdot$

a_n . 设 $b_n = \frac{a_n}{n}$.

(1) 求 b_1, b_2, b_3 ;

(2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列，并说明理由；

① 基金项目：国家教育考试科研规划 2017 年度重点课题“高考批判性思维考查研究”(GJK2017012)

(3)求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

例1是解答题的起点题,难度并不高,将等比数列的概念与通项公式作为考查的重点,体现了新课程标准对数列学习的基本要求.试题在所求数列中加入了讨论,判断的问题,通过设问展现了思维的过程.第一问先算一算 b_1, b_2, b_3 ,通过观察发现这三个数之间有什么规律;第二问想一想,验证发现的规律是否正确;第三问再算一算,通过找到的规律求出 $\{a_n\}$ 的通项公式.三个小问的设计层层递进,逐步深入,充满了探究的味道,充分体现了新课程标准研究型学习的理念.试题的数量关系与计算过程简单,虽难度不高但展现了一个简单探究问题的完整思维过程,体现出很好的教学导向.

例2(2016年I卷文科第20题)

在直角坐标系 xOy 中,直线 $l: y=t(t \neq 0)$ 交 y 轴于点 M ,交抛物线 $C: y^2=2px (p>0)$ 于点 P , M 关于点 P 的对称点为 N ,连结 ON 并延长交 C 于点 H .

(1)求 $\frac{|OH|}{|ON|}$;

(2)除 H 以外,直线 MH 与 C 是否有其它公共点? 说明理由.

例2考查抛物线概念、性质和抛物线与直线的位置关系,其几何意义是展现了从抛物线外一点通过尺规作图的方法作抛物线切线的过程.第一问是计算题,通过求出 N 点、 H 点的坐标计算求得 $\frac{|OH|}{|ON|}$ 的值.第二问是开放性问题,可以通过多种方法获得结论.用常规的解析几何做法可以先求出直线 MH 的方程,联立直线 MH 与抛物线的方程求交点坐标,得到只有一个交点的结论;也可以由题目本质出发,从切线的角度进行思考,求出抛物线 M 点切线的斜率,证明该斜率等于直线 MH 的斜率,从而得出直线 MH 是抛物线的切线,因此只有一个交点的结论.试题有明确的几何直观意义,考查了运用解析几何方法解决问题的能力,结合题目背景可以提出一系列类比问题,如“其他圆锥曲线有没有与本题类似的性质”“能否过圆锥曲线外一点用尺规作出切线”等,可通过这些问题在教学过程中引导学生拓展性的思考其中蕴含的思想方法,自主探究学习^[7].

2 体现综合性,加强理性思维考查

批判性思维是一种识别、评价思维过程中各种推理论证的能力,从是否合理的角度来评判推理与论证.高中数学教学中培养学生的批判性思维,很重要的一点就是树立学生尊重事实和依据,严谨务实的科学态度,培养运用科学的方法认识事物、解决问题的思维习惯与能力^[8].数学具有严谨的理论和逻辑体系,是培养理性思维与批判性思维的良好载体.在高考中通过对逻辑推理和理性思维的考查,充分展现学生对于推理和论证的确认、分析、评价、展示的全过程,从而衡量其批判性思维的发展水平.而对于理性思维的考查,突出体现在综合分析问题的过程之中,通过复杂情境的设计增强题目综合性,考量学生是否能够根据已知信息,从合理的角度思考问题,用合理的方法解决问题.

例3(2018年I卷理科第12题)

已知正方体的棱长为1,每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等,则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为

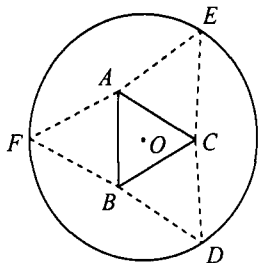
- A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

例3以考生熟悉的正方体为背景,以线面关系为切入点,使学生在观察与实验中不断调整正方体截面的位置,灵活应用线线角、线面角、面面角等相关知识,充分发挥自己的想象力和创新能力,构建符合试题要求的正方体的截面图形正六边形.试题要求考生灵活运用转化思想、对称思想来分析研究问题,题设条件可化归为过正方体的同一顶点三条棱与截面 α 所成角相等的问题探索,抓住问题的本质特征,提高思维的有效性.解题思路可以从多个角度出发,既可以用几何方法来做,也可以转化为求函数最值的问题,体现了知识的综合运用,对立体几何教学如何更好地培养学生的核心素养发挥积极的导向作用.

例4(2017年I卷理科第16题)

如图,圆形纸片的圆心为 O ,半径为5 cm,该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 O . D, E, F 为圆 O 上的点, $\triangle DBC, \triangle ECA, \triangle FAB$ 分别是以 BC, CA, AB 为底边的等腰三角形.沿虚线

剪开后,分别以 BC, CA, AB 为折痕折起 $\triangle DBC, \triangle ECA, \triangle FAB$,使得 D, E, F 重合,得到三棱锥. 当 $\triangle ABC$ 的边长变化时,所得三棱锥体积(单位: cm^3) 的最大值为_____.



例4以立体几何题目为背景,综合考查了简单几何体的空间直观图与平面展开图,解三角形,求函数最值等多方面内容. 看似是几何问题,但其难点在于选取恰当的体积函数模型来计算最值. 不同的变量选择,会得到不同的函数模型;用不同函数模型进行计算,难度也存在较大差异. 因此,如何确定合理的解题策略和建模策略,选取相对简单的函数模型简化计算,是本题考查的关键. 试题设计新颖,突出体现了综合性、应用性与创新性,考查了数学运算与数学建模等数学核心素养,对于在复杂情境综合分析问题具有很好的导向作用^[9].

需要指出的是,高考中所强调的综合性主要是指数学知识体系的内部联系,数学各分支内容的相互交叉与渗透^[10]. 通过考查各分支内容之间的联系,增强考试内容的综合性,从而引导学生注重认识事物整体结构,理解事物变化发展过程,从正确的角度分析具体问题,通过严密的论证推理解决问题. 鼓励学生从整体上分析各种现象的本质和规律,建构完整的知识框架和合理的认知结构.

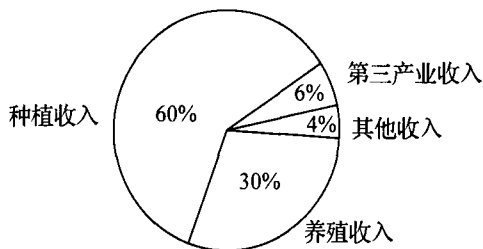
3 突出创新性,强调合理运用知识

批判性思维能够使人们认识到事物结构的多样性. 推理论证并没有绝对的对错之分,前提是否正确、分析方法是否得当、分析过程中蕴含着怎样的假设、这些假设是否合理都会对推理论证的结论产生影响. 在高中阶段的数学学习过程中,一个最大的误区就是通过机械刷题进行学习,解决问题时习惯性的依据刷题的经验,生搬硬套自己熟悉的知识和方法,而忽略了这些知识和方法的使用是否合理. 对于大多数数学问题来说,都没有所

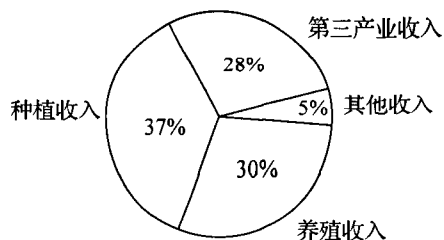
谓放之四海而皆准的绝对正确的方法,即便是对于数学通性通法的学习,也要在理解掌握的基础上灵活运用,而不是遇到所有问题都死板地套用这些通性通法. 数学科高考在试题设计、素材选择等方面不断探索创新,力求创设新颖的情境,提出新颖的问题,希望以此为风向标,引导基础教育培养学生灵活、合理地应用数学知识与方法解决问题的能力,进而促进其创造性思维能力与创新意识的提高^[11].

例5(2018年I卷文、理科第3题)

某地区经过一年的新农村建设,农村的经济收入增加了一倍,实现翻番. 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况,统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例,得到如下饼图:



建设前经济收入构成比例



建设后经济收入构成比例

则下面结论中不正确的是

- A. 新农村建设后,种植收入减少
- B. 新农村建设后,其他收入增加了一倍以上
- C. 新农村建设后,养殖收入增加了一倍
- D. 新农村建设后,养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

利用统计图显示数据是数据处理的重要技术手段,各种统计图都有其适用场景和独特作用. 比如例5中考查的饼图,在显示总体中各种组成成分所占比例方面,具有简单、直观、易懂的优势. 近年的高考试题中,还曾经出现过雷达图、柱状图等

统计图表.课程标准中数据处理的核心素养对于高中统计教学提出了更高的要求,通过对数据的整理,选取合适的统计图显示数据,解读统计图,并从中提取信息是统计的基本技能.对于学生来说,如何在复杂信息中提取有用的信息,获得逻辑推理的合理论据,则需要具有独立的批判性思维.本题要求考生读懂统计图,并从图中获得相关的信息,重点考查了统计学的核心素养,考生在此过程中还能体会到统计学中图形技术的作用与魅力.题目在增强学生学习数学、统计学的兴趣,引导中学加强学科核心素养的培养,提高数学应用能力和应用意识等方面具有很好的引导作用.

例6(2017年I卷理科第12题)

几位大学生响应国家的创业号召,开发了一款应用软件.为激发大家学习数学的兴趣,他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动.这款软件的激活码为下面数学问题的答案:已知数列 $1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, \dots$,其中第一项是 2^0 ,接下来的两项是 $2^0, 2^1$,再接下来的三项是 $2^0, 2^1, 2^2$,依此类推.求满足如下条件的最小整数 $N: N > 100$ 且该数列的前 N 项和为2的整数幂.那么该款软件的激活码是

A. 440 B. 330 C. 220 D. 110

例6通过合理设计,将等差数列和等比数列有机地结合在一起,具有一定的难度.考生在解题

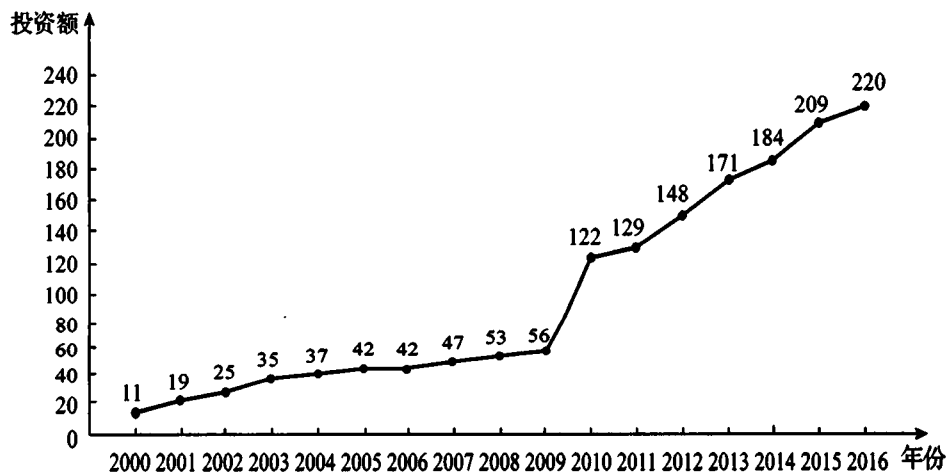
过程中,需要知道求什么,通过什么方法可以求.这就要求考生有扎实的数列认知和转化能力,能够熟练掌握并综合运用等差数列、等比数列的基础知识.试题打破了数列题目的常规,题目解答避开了解题套路与现成的方法,同时又展现了数学的巧妙性和趣味性,有助于培养和保持学生不断学习数学的兴趣^[9].

4 增加思维量,考查理解分析能力

2018年数学科高考释放了“一多一少”的明显信号,即多考一点想的,少考一点算的^[12].减少试题解答过程中数值计算的复杂性,更清晰地考查考生是否掌握题目中蕴含的数学思想方法.通过增加试题思维量的比重为批判性思维的考查提供平台,鼓励考生创造性的进行思考,灵活运用所学知识分析和解决问题.尤为突出的是,在今年高考的概率统计题目中,采取了“重心后移”的策略,将学生从数据准备阶段的繁杂计算中解放出来,在题目中提前对数据进行分类处理,把重点后移至对于数学模型的分析、理解、判断之上.并且加大了对数据解释的开放性,使学生摆脱标准答案的束缚,体现了灵活考查概率统计思想方法的设计目的.

例7(2018年II卷文、理科第18题)

下图是某地区2000年至2016年环境基础设施投资额 y (单位:亿元)的折线图.



为了预测该地区2018年的环境基础设施投资额,建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型.根据2000年至2016年的数据(时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \dots, 17$)建立模型①: $\hat{y} = -30.4 +$

$13.5t$;根据2010年至2016年的数据(时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \dots, 7$)建立模型②: $\hat{y} = 99 + 17.5t$.

(1)分别利用这两个模型,求该地区2018年

的环境基础设施投资额的预测值;

(2)你认为用哪个模型得到的预测值更可靠?并说明理由.

例7的新颖之处在于,不要求考生根据数据计算求解,而是直接给出了回归方程,要求考生对其进行分析和判断,避免了繁琐的计算,突出了对于概率统计基本思想、基本能力的考查.2018年III卷文、理科第18题也是在题目中做好了一部分数据整理工作,填写好茎叶图,要求考生在此基础上分析数据,得出结论.这些题目减少了繁琐的数据整理步骤,将考查重点放在运用概率统计思想方法分析和解释数据之上,突出了考查重点,对于中学概率统计知识的教学具有良好的导向作用,引导教学从“解题”到“解决问题”能力的培养.

5 结语

高考立足于考查支撑学生终身发展和适应时代要求的能力.加强批判性思维考查,培养学生创新意识和独立思考的能力,是时代赋予高考的历史使命.数学科高考要结合学科特点,通过增强考试的开放性、综合性、创新性,引导考生创造性地思考问题,灵活地运用所学知识、方法解决问题.因此应深化创新试题设计方式,打破机械刷题的套路和常规,通过降低刷题收益切实减轻学生负担,助推素质教育发展.进一步鼓励学生主动思考,激发学生的想象力与好奇心,培养学习数学的兴趣,释放明确信号引导基础教育步入良性循环的轨道,并为高等院校选拔人才提供有力支持.

(上接第37页)

还能迁移此经验至后续学习,理解了图形的旋转其实是点的旋转,为图形旋转的作图提供了依据.所以,在教学中,我们教师一定要把握时机,抓住本质,与学生一起分析、归纳、抽象,这正是数学抽象思维的的生长点.

但是,对于初中学生而言,在抽象的数学概念学习中,也需要生活经验和活动经验的成长来助推,这样才能使得学生形成的概念更加生动、更加鲜活.游离于思维经验成长、思维品质提升的数学学习不是真正意义上的数学教学.但是,没有生活经验和活动经验的数学学习,不能成为适合初中学生的数学教学.

建构主义认为,知识不是对现实的纯粹客观

参考文献

- [1] 为建设世界科技强国而奋斗——在全国科技创新大会、两院院士大会、中国科协第九次全国代表大会上的讲话[M]. 北京:人民出版社,2016
- [2] 国务院. 国务院关于深化考试招生制度改革的实施意见[EB/OL].
http://www.moe.edu.cn/publicfiles/business/htmlfiles/moe/moe_1778/201409/174543.html,2014-09-03/2018-06-12
- [3] Linda Elder, Richard Paul. A Glossary Of Critical Thinking Terms And Concepts[M]. 北京:外语教学与研究出版社,2016
- [4] 戴维·希契柯克. 批判性思维教育理念[J]. 高等教育研究,2012(11),54-63
- [5] 周建武. 论证有效性分析——逻辑与批判性写作指南[M]. 北京:清华大学出版社,2016
- [6] 教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京:人民教育出版社,2018
- [7] 教育部考试中心. 高考文科试题分析(2017年版)[M]. 北京:高等教育出版社,2016
- [8] 秦亚平. 例谈数学模型构建中的理性思维培养[J]. 教学参考,2017(11),17-19
- [9] 教育部考试中心. 高考理科试题分析(2018年版)[M]. 北京:高等教育出版社,2017
- [10] 任子朝,陈昂,赵轩. 数学核心素养评价研究[J]. 课程·教材·教法,2018(5),116-121
- [11] 任子朝,陈昂. 高考数学加强创新能力考查研究[J]. 创新人才教育,2016(3),30-33
- [12] 教育部考试中心. 素养导向新举措,能力考查新突破——2018年数学高考试题评析[J]. 中国考试,2018(07),8-12

的反映,只不过是人们对客观世界的一种解释、假设或假说;学生对知识的理解,还需要个体基于自己的知识经验而建构,还需要取决于特定情境下的学习历程.数学概念教学是数学定理、法则、公式教学的基础,为了让学生全面理解、掌握数学概念,教师要紧紧围绕数学本原性问题,从不同维度对同一数学概念组织一系列的认知活动,从多维度帮助学生自主构建,这不是一件事倍功半的“蠢事”,而是一件为学生后续学习打基础的“好事”.所以,教师要充分利用学生的生活经验、活动经验和思维经验来组织课堂教学,同时在数学基础知识的传授和基本技能的训练过程,不断地成长学生的经验,提升学生的数学核心素养.