素养导向下对 2021 年高考导数压轴题的解法探析*

福建省南平市高级中学 (353000) 江智如
福建省南平市教师进修学院 (354200) 许贵全

1 问题提出

随着 2021 年高考数学试卷揭开神秘的面纱,全国各地掀起研究各类试题的热潮. 今年数学试卷共有 10 套,包括教育部考试中心命制的 6 套全国卷,地方自主命卷的 4 套(北京、天津、上海、浙江). 试卷聚焦核心素养,突出关键能力,体现试卷的选拔功能和育人导向,稳中求新,体现基础性、综合性、应用性和创新性的考查要求. 函数与导数知识是高中数学的重难点,常以压轴题形式出现,突出试卷的区分性与选拔性,引导学生通过具体实例感受导数在研究函数性质和解决实际问题中的作用,让考生深刻理解不断动态变化的事物本质,提高思维层次. 综合 2021 年高考数学试卷中导数压轴题,可以发现试题比较全面地考查导数基础知识和基本思想方法,难度适中,遵循通性通法,由易到难的顺序排列,先设置难度较低的问题,面向大部分考生,再逐步提高难度,体现试题的选拔功能,考查考生掌握导数知识的水平与应用能力. 为此,本文在数学学科素养的指导下,探究导数压轴题的通性解法,提高考生解题的准确率,促进学科综合素养的提升.

2 解法探析

解决导数问题的思路是依据导数判断函数单调性的方法,运用导数运算法则,通过分析法,执果索因[1],构造函数进行求解. 综合考查考生化归与转化思想、推理论证能力和运算求解能力. 根据《课程标准》和《高考评价体系》的要求,从考生的认知水平与已有数学能力的角度出发,笔者归纳整理五种解题方法:(1)极值点偏移法;(2)切线放缩法;(3)对数不等式法;(4)数形结合法;(5)作差比较法.

3 试题解析

3.1 极值点偏移法

题 1 (2021 年高考全国新课标 I 卷 22)已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$. (1)讨论 $f(x)$ 的单调性;(2)设 a,b 为两个不相等的正数,且 $b\ln a-a\ln b=a-b$,证明:$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.

思路分析:将已知等式变形为 $\frac{1}{a}\left(1-\ln\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{b}\left(1-\ln\frac{1}{b}\right)$,然后根据极值点偏移方法讨论证明.

解法 1:(1)容易求得 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

(2)把 $b\ln a-a\ln b=a-b$ 变形为 $\frac{1}{a}\left(1-\ln\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{b}\left(1-\ln\frac{1}{b}\right)$,即 $f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)$. 由(1)知,$f(x)_{\max}=f(1)=1$. 当 $x\to 0$ 时,$f(x)\to 0$;当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to-\infty$. 特别地,$f(e)=0$. 令 $\frac{1}{a}=x_1$,$\frac{1}{b}=x_2$,则 $x_1\neq x_2$,又 $f(x_1)=f(x_2)$,故由函数 $f(x)$ 的图象(图 1)知 $x_1,x_2\in(0,e)$,不妨设 $0<x_1<1<x_2<e$. 因此原不等式等价为 $2<x_1+x_2<e$. 下面先证明:$x_1+x_2>2$.

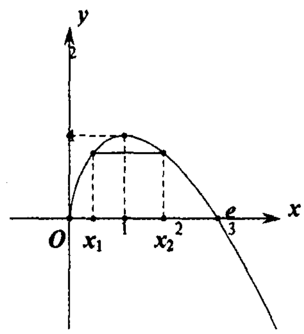

图 1

要证明 $x_1+x_2>2$ 成立,只要证明 $x_2>2-x_1$ 成立. 因为 $0<x_1<1$,所以 $1<2-x_1<2$,由 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,可得 $x_2>2-x_1$ 等价于 $f(x_2)<f(2-x_1)$,而 $f(x_1)=f(x_2)$,因此只要证明 $f(x_1)<f(2-x_1)$,即证明 $f(x_1)-f(2-x_1)<0$. 构造函数 $F(x)=f(x)-f(2-x)$,$x\in(0,1)$,则 $F(x)=(2x-2)-x\ln x+(2-x)\cdot\ln(2-x)$,$F'(x)=-\ln x(2-x)$. 由 $x\in(0,1)$,可得 $x(2-x)\in(0,1)$,故 $F'(x)>0$,所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,从而 $F(x)<F(1)=0$,即 $F(x)=f(x)-f(2-x)<0$,而 $0<x_1<1$,故 $f(x_1)-f(2-x_1)<0$,因此 $x_1+x_2>2$ 成立.

再证明:$x_1+x_2<e$.

因为 $0<x_1<1<x_2<e$,所以当 $x_2\leqslant e-1$ 时,$x_1+x_2<e$ 显然成立;当 $x_2\in(e-1,e)$ 时,要证明 $x_1+x_2<e$,只要证明 $x_1<e-x_2$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,所以只要证明 $f(x_1)<f(e-x_2)$,而 $f(x_1)=f(x_2)$,因此只要证明 $f(x_2)<f(e-x_2)$. 构造函数 $G(x)=f(x)-f(e-x)$,$x\in(e-1,e)$,则 $G'(x)=-\ln x(e-x)$. 由于函数 $y=x(e-x)$ 在 $(e-1,e)$ 上单

* 本文为福建省教育科学"十三五"规划 2020 年度立项课题《核心素养导向下的高中数学主题教学校本研究》(立项批准号:FJJKXB20-1067)阶段性成果.

调递减,故 $y=x(e-x)\in(0,e-1)$,从而 $G'(x)=-\ln x(e-x)$ 在 $(e-1,e)$ 上单调递增,且 $G'(e-1)<0$, $G'\left(e-\frac{1}{3}\right)>0$,故存在 $x_0\in\left(e-1,e-\frac{1}{3}\right)$,有 $G'(x_0)=0$,当 $x\in(e-1,x_0)$ 时,$G'(x)<0$,$G(x)$ 单调递减;当 $x\in(x_0,e)$ 时,$G'(x)>0$,$G(x)$ 单调递增. 因此 $G(x)<\max\{G(e-1),G(e)\}$. 因为 $G(e-1)=f(e-1)-f(1)=(e-1)[1-\ln(e-1)]-1$,而 $\ln\frac{1}{e-1}<\frac{1}{e-1}-1$ 成立,所以 $G(e-1)<0$. 又 $G(e)=f(e)-f(0)\to 0$,故 $G(x)<0$,即 $f(x)<f(e-x)$,于是 $f(x_2)<f(e-x_2)$,因此 $x_1+x_2<e$. 综上所述,$2<x_1+x_2<e$ 成立.

评析:极值点偏移问题是近几年高考与各地模拟考的热点,解法 1 先把等式等价转化为 $f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)$,然后依据极值点偏移法求解[1],考查考生化归与转化思想,函数与方程思想,特殊与一般思想,数形结合始终贯穿解题过程,逐层递进,实现对考生数学抽象素养、直观想象素养、数学运算素养的渗透与培养[2].

3.2　切线放缩法

思路分析: 由于解法 1 函数 $G(x)$ 单调性的验证过程复杂,难以直接判断 $G(x)$ 的正负,故考虑利用函数 $f(x)$ 在 $(e,0)$ 的切线判断与 $f(x)$ 的大小,构造新函数运用放缩法证明结论.

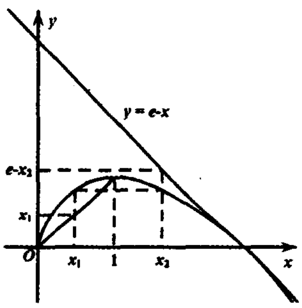

图 2

解法 2: 如图 2 可求函数 $f(x)$ 在 $(e,0)$ 的切线方程为 $y=e-x$. 令 $H(x)=f(x)-(e-x)=2x-x\ln x-e$, $x\in(0,e)$,则 $H'(x)=1-\ln x>0$,从而 $H(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增,于是 $H(x)<H(e)=0$,即在 $x\in(0,e)$ 上,有 $f(x)<e-x$. 令 $t=f(x_1)=f(x_2)$,则 $t=f(x_2)<e-x_2$,故 $t+x_2<e$. 又 $t=f(x_1)=x_1(1-\ln x_1)$, $x_1\in(0,1)$,故 $t=x_1(1-\ln x_1)>x_1$,因此 $x_1+x_2<t+x_2<e$.

评析:利用图象法求解导数问题能减少计算量,减轻考生的计算负担,考查考生数形结合思想与直观想象能力[3]. 解法 2 从函数 $f(x)$ 在 $(e,0)$ 的切线与 $f(x)$ 的大小关系入手,运用放缩法证明,要求考生具有扎实的几何功底,体现数学学习的能力与潜能,有利于考生直观想象素养和数学建模素养的提升.

3.3　对数不等式法

思路分析: 将已知不等式等价转化为 $\frac{1}{b^2}+\frac{2\ln b}{b}>\frac{1}{a^2}+\frac{2\ln a}{a}$,利用函数单调证明 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$;再运用对数不等式结论,放缩证明 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.

解法 3: 由(1)可知 $f(x)\leqslant f(x)_{\max}=f(1)=1$,不妨设 $a>b$,则由(1)可知 $\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}$,故 $a>1$.

又 $b\ln a-a\ln b=a-b$ 等价于 $\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}>0$,故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2\Leftrightarrow\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}>2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}>2\left(\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{b^2}+\frac{2\ln b}{b}>\frac{1}{a^2}+\frac{2\ln a}{a}$,于是,只需证明函数 $F(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{2\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,也即证明 $F'(x)\leqslant 0$. 过程如下:

$$F'(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{2(1-\ln x)}{x^2}=\frac{2}{x^3}[x(1-\ln x)-1]$$

$=\frac{2}{x^3}[f(x)-1]\leqslant 0$,故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$. 再用"对数不等式 $\ln x\leqslant x-1$,当且仅当 $x=1$ 时,等号成立"证明 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$ 成立. 已知条件等价于 $\frac{1}{a}+\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{b}+\frac{\ln b}{b}$,即 $f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)$. 则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{a}+\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{b}+\frac{\ln b}{b}=\frac{1}{b}\ln(eb)\leqslant\frac{1}{b}\cdot(eb-1)=e-\frac{1}{b}$,即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.

综上所述,$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$ 成立.

评析:解法 3 是由福建省仙游金石中学的林琳提供[4],先从多项式因式分解角度入手,构造函数 $F(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{2\ln x}{x}$,把不等式关系等价转化为判断函数 $F(x)$ 的单调性,然后再利用对数不等式结论放放缩证明,执果索因. 解法技巧性强,妙不可言,体现解题者扎实的数学基本能力与数学运算功底.

3.4　数形结合法

题 2　(2021 年高考全国甲卷理 21)已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$,函数 $f(x)=\frac{x^a}{a^x}(x>0)$.

(1)当 $a=2$ 时,求 $f(x)$ 的单调区间;(2)若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点,求 a 的取值范围.

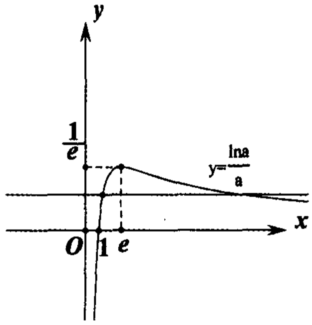

图 3

思路分析: 由于试题考查含参曲线的交点问题,所以考虑分离参数法,利用函数图象求解.

解法:(1)容易求得$f(x)$在$\left(0,\frac{2}{\ln2}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{2}{\ln2},+\infty\right)$上单调递减.

(2)由已知条件可得$f(x)=1$有且仅有两个解,即$x^a=a^x$,则$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$.令$F(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$,则$F(x)=\frac{\ln a}{a}$有且仅有两个解.因为$F'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,所以令$F'(x)=0$,得$x=e$.当$x\in(0,e)$时,$F'(x)>0$,$F(x)$上单调递增;当$x\in(e,+\infty)$时,$F'(x)<0$,$F(x)$上单调递减.又$F(1)=0$,当$x>e$时,$F(x)>0$,所以可得$F(x)$的图象(图3).由于$F(x)_{\max}=F(e)=\frac{1}{e}$,故当$\frac{\ln a}{a}\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时,原命题成立,即$0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}=\frac{\ln e}{e}$,而$a>0$且$a\neq1$,所以$a>1$且$a\neq e$,因此$a\in(1,e)\cup(e,+\infty)$.

评析:数形结合的思想体现空间形式与数量关系的科学本质.通过“以形助数,以数辅形”使复杂问题简单化、抽象问题具体化.本解法把函数图象的交点问题等价转化为方程$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$解的问题,再利用函数$F(x)=\frac{\ln x}{x}$与直线$y=\frac{\ln a}{a}$的相交情况,求出$a$的取值范围.考查考生化归与转化思想,加强考生数学抽象、直观想象及数学运算素养的培养.

题3　(2021年高考全国新课标II卷22)已知函数$f(x)=(x-1)e^x-ax^2+b$.(1)讨论函数$f(x)$的单调性;(2)从下面两个条件中选一个,证明:$f(x)$有一个零点.①$\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{e^2}{2}$,$b>2a$;②$0<a<\frac{1}{2}$,$b\leqslant2a$.

思路分析:本试题第(2)问是结构不良问题,考查函数零点问题,考虑根据函数图象利用介值定理证明.

解法:(1)容易求得当$a\leqslant0$时,$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增;当$0<a<\frac{1}{2}$时,$f(x)$在$(-\infty,\ln2a)$,$(0,+\infty)$上单调递增,在$(\ln2a,0)$上单调递减;当$a=\frac{1}{2}$时,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增;当$a>\frac{1}{2}$时,$f(x)$在$(-\infty,0)$,$(\ln2a,+\infty)$上单调递增,在$(0,\ln2a)$上单调递减.

(2)若选①$\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{e^2}{2}$,$b>2a$,则由(1)知$f(x)$极大值为$f(0)=b-1>0$,且$f\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=-\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)e^{-\sqrt{\frac{b}{a}}}<0$,于是由连续函数介值定理得,$f(x)$在$(-\infty,0)$上有唯一零点;又$f(x)$极小值为$f(\ln2a)=a(2-\ln2a)\ln2a-2a+b>0$,故$f(x)$在$(0,+\infty)$上无零点,综上,$f(x)$有且仅有一个零点.

若选②$0<a<\frac{1}{2}$,$b\leqslant2a$,则由(1)知$f(x)$极大值为$f(\ln2a)=a(2-\ln2a)\ln2a-2a+b<0$,故$f(x)$在$(-\infty,0)$上无零点;由于$e^x>x$,故当$x>1$时,$f(x)=(x-1)e^x-ax^2+b>(x-1)x-\frac{1}{2}x^2+b=\frac{1}{2}x^2-x+b$,而$b\leqslant2a<1$,故取$x_0>2$,有$f(x)>0$,又$f(x)$极大小值为$f(0)=b-1<0$,因此$f(x)$在$(0,+\infty)$上有唯一零点.综上,$f(x)$有且仅有一个零点.

评析:本试题第(1)问考查导数研究函数性质、不等式等相关知识,面向大部分考生,只需对参数a分类讨论便可顺利求解,考查分类与整合思想,帮助考生加深对导数基础知识和基本技能的理解.第(2)问是“结构不良问题”,对考生的逻辑推理能力、数学抽象能力、直观想象能力等有深入的考查,体现素养导向、能力为重的命题原则,有助于考生数形结合思想的培养,直观想象素养的提升.

题4　(2021年高考全国甲卷文20)已知函数$f(x)=a^2x^2+ax-3\ln x+1$,其中$a>0$.

(1)讨论函数$f(x)$的单调性;(2)若$y=f(x)$的图象与x轴没有公共点,求a的取值范围.

思路分析:根据函数与方程思想,把函数交点问题转化为方程$f(x)=0$问题,利用函数图象求解.

解法:(1)容易求得$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增.

(2)$y=f(x)$的图象与x轴没有公共点等价于$f(x)=0$无解,由(1)知问题只需$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{a}\right)=3+3\ln a>0$对$a>0$恒成立,故$\ln a>-1$,解得$a>\frac{1}{e}$,所以$a$的取值范围为$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

评析:本试题以函数零点与方程根据为知识载体,考查函数$f(x)$的零点问题[5].考生可以根据第(1)问的结论,借助函数$f(x)$的图象把第(2)问转化为函数$f(x)>0$恒成立问题[6],考查函数与方程思想、数形结合思想和化归与转化思想,培养考生综合应用基本方法解决问题的能力.

3.5 作差比较法

题5　(2021年高考全国乙卷理20)设函数$f(x)=\ln(a-x)$,已知$x=0$是函数$y=xf(x)$的极值

点.(1)求 a;(2)设函数 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}$,证明:$g(x)<1$.

思路分析:根据函数 $y=xf(x)$ 的正负,把分式不等式等价转化为整式不等式,利用作差比较法证明.

解法:(1)容易求得 $a=1$,且 $y=xf(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,在 $(0,1)$ 上单调递减.

(2)由(1)知 $y=xf(x)\leqslant 0$. 由于 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$,所以要证明 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}<1$,只要证明 $x+f(x)>xf(x)$,只要证明 $x+(1-x)f(x)>0$,即证明 $x+(1-x)\ln(1-x)>0$. 令 $F(x)=x+(1-x)\ln(1-x)$,$x\in(-\infty,0)\cup(0,1)$,则 $F'(x)=-\ln(1-x)$. 当 $x\in(0,1)$ 时,$F'(x)>0$,$F(x)$ 上单调递增;当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$F'(x)<0$,$F(x)$ 上单调递减. 所以 $F(x)>F(0)=0$,即 $x+(1-x)\ln(1-x)>0$.

评析:试题以导数知识为载体,以函数单调性与不等式知识为素材,考查考生的运算求解能力和创新应用能力以及化归与转化思想. 考生在读懂题、审准题的基础上,解题的关键在于将问题转化为不等式的大小判断问题. 要求考生在能够熟练掌握用导数研究函数性质、不等式作差比较法等相关知识的同时,要有较强的分析和解决问题的能力.

4. 综合应用

题 6 (2021 年高考浙江卷 22)设 a,b 为实数,且 $a>1$,函数 $f(x)=a^x-bx+e^2(x\in R)$. (1)求函数 $f(x)$ 的单调区间;(2)若对任意 $b>2e^2$,函数 $f(x)$ 有两个不同的零点,求 a 的取值范围;(3)当 $a=e$ 时,证明:对任意 $b>e^4$,函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1,x_2,满足 $x_2>\dfrac{b\ln b}{2e^2}x_1+\dfrac{e^2}{b}$.

注:$e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数.

思路分析:第(1)问对参数 b 讨论求得函数 $f(x)$ 的单调区间;第(2)问含参函数的零点问题考虑采用分离参数法,利用函数图象求解;第(3)问根据函数图象考虑运用放缩法求证.

解法:(1)容易求得当 $b\leqslant 0$ 时,$f(x)$ 在 R 上单调递增;当 $b>0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\log_a\dfrac{b}{\ln a}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\log_a\dfrac{b}{\ln a},+\infty\right)$ 上单调递增.

(2)由已知得 $a^x-bx+e^2=0$ 有两个不同解,等价于 $e^{x\ln a}-bx+e^2=0$ 有两个不同解.

令 $t=x\ln a$,则 $e^t-\dfrac{bt}{\ln a}+e^2=0$,整理得 $\dfrac{b}{\ln a}=\dfrac{e^t+e^2}{t}$,$t>0$. 设 $g(t)=\dfrac{e^t+e^2}{t}$,则 $g'(t)=\dfrac{e^t(t-1)-e^2}{t^2}$;再记 $h(t)=e^t(t-1)-e^2$,则 $h'(t)=e^t t>0$,从而 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,又 $h(2)=0$,故当 $x\in(0,2)$ 时,$h(t)<0$;当 $x\in(2,+\infty)$ 时,$h(t)>0$. 所以 $g(t)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,于是由函数图象可知当 $\dfrac{b}{\ln a}>g(t)_{\min}=g(2)=e^2$ 时,函数 $f(x)$ 有两个不同的零点,解得 $\dfrac{b}{e^2}>\ln a$,又 $b>2e^2$,故只需 $2\geqslant\ln a$,即 $1<a\leqslant e^2$,因此 a 的取值范围为 $(1,e^2]$.

(3)当 $a=e$ 时,$f(x)=e^x-bx+e^2$ 有两个不同解,等价于 $e^x+e^2=bx>0$ 有两个不同解,不妨设 $x_1<x_2$,则由(2)得 $x_1<2<x_2$. 因为 $b=\dfrac{e^{x_1}+e^2}{x_1}=\dfrac{e^{x_2}+e^2}{x_2}>e^4$,而 $\dfrac{e^5+e^2}{5}<e^4$,所以 $x_2>5$. 又 $b=\dfrac{e^{x_1}+e^2}{x_1}<\dfrac{2e^2}{x_1}$,故 $x_1<\dfrac{2e^2}{b}$. 要证 $x_2>\dfrac{b\ln b}{2e^2}x_1+\dfrac{e^2}{b}$,只要证明 $x_2>\ln b+\dfrac{e^2}{b}$. 又 $b=\dfrac{e^{x_2}+e^2}{x_2}<\dfrac{2e^{x_2}}{x_2}$,且 $\ln b+\dfrac{e^2}{b}$ 在 $b>e^4$ 上单调递增,所以只需证 $x_2>\ln\dfrac{2e^{x_2}}{x_2}+\dfrac{e^2x_2}{2e^{x_2}}$,即证 $\ln e^{x_2}-\ln\dfrac{2e^{x_2}}{x_2}-\dfrac{e^2x_2}{2e^{x_2}}>0$,即证 $\ln x_2-\ln 2-\dfrac{e^2x_2}{2e^{x_2}}>0$. 因为 $\dfrac{e^2}{2}<4$,所以只要证 $\ln x_2-\ln 2-\dfrac{4x_2}{e^{x_2}}>0$ 对 $x_2>5$ 成立. 令 $\varphi(x)=\ln x-\ln 2-\dfrac{4x}{e^x}$,$x>5$,则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}+4(x-1)e^{-x}>0$,从而 $\varphi(x)$ 在 $(5,+\infty)$ 上单调递增,又 $\varphi(5)=\ln\dfrac{5}{2}-\dfrac{20}{e^5}>0$,故 $\varphi(x)>0$ 在 $(5,+\infty)$ 恒成立,因此原不等式成立.

评析:本试题以函数零点知识为载体,导数研究函数性质知识为素材,为考生推理论证搭建了许多途径的思考平台. 考生在 $f(x)$ 的单调性的基础上,用图象直观表示函数 $f(x)$ 的性质,利用分离参数法求解参数 a 的范围,考查考生数形结合思想、化归与转化思想及运算求解能力. 然后运用不等式放缩法,利用化归与转化思想,把问题转化为判断函数 $\varphi(x)$ 的正负问题,为考生提供丰富的思维方法和解题途径,让考生的推理论证能力得到充分的展示,体现试题的区分性与选拔性,促进考生数学素养的提升.

5 结语

匈菲尔德(Schoenfeld)强调"在数学解题过程中,元认知因素居于关键的地位,因为如何有效地运用资源,如何采用适当的解题策略,常常是由元认知所主导的". 波利亚(Polya)建议"把问题转化

为一个等价的问题,把原问题化归为一个已解决问题,去考虑一个可能相关的问题,先解决一个更特殊的问题、或更一般的问题、或类似的问题". 因此在日常的教学实践中,教师应指导学生理解与掌握导数的概念与性质,设计合理的"精致练习"[7]加强导数应用的训练,总结相关题型的通性通法,启发思维,提高导数问题的分析与解决能力,促进学生数学学科综合素养的提升.

参考文献

[1]江智如. 逻辑推理指引下极值点偏移解题策略的探究[J]. 中学数学研究(华南师大). 2019(7)上:4-7.

[2]江智如. 利用图象法刍议函数整数解问题的解题策略[J]. 中学数学研究(华南师大). 2019(4)上:10-13.

[3]江智如. 直观想象素养下一道高中数学联赛试题的解法探析[J]. 中学数学研究(江西师大). 2019(12):48-49.

[4]林琳. 用"对数不等式"解两道新高考 I 卷题[EB/OL]. https://mp.weixin.qq.com/s/psThK2Jid07SnDoJpVqt5A.

[5]江智如,应丽珍,张文玫. 例谈图像法求解函数零点问题的方法探析[J]. 中学数学研究(江西师大). 2019(7):37-39.

[6]江智如. 例谈不等式恒成立与存在性问题的解题策略[J]. 中学数学研究(华南师大). 2018(11)上:45-47.

[7]江智如. 高中平面向量教学中的"精致练习"[J]. 福建中学数学. 2016(1):16-19.

一道高考题的题源探析与拓展

江苏省南通中学　(226001)　黄　锋

2021 年是江苏回归新高考的首年,新高考全国卷Ⅰ卷数学试题在考察形式上与原江苏卷有较大的差异. 比如说数列内容的考查,原江苏卷是以压轴题的形式考查的,而新高考全国卷对数列的考查要求要稍微低一点,注重考查数列递推关系这个本质. 今年解答题第 17 题考查了数列,主要考查定义法证明一个数列为等差数列,求数列的前 n 项的和,数列的递推关系是以奇偶项交叉递推的形式给出的.

1　考题分析

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n\text{ 为奇数},\\ a_n+2, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ (1) 记 $b_n=a_{2n}$, 写出 b_1,b_2, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式; (2) 求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和. (2021 年新高考Ⅰ卷第 17 题)

考生解法分析:通过考后与考生交流发现,考生写出 b_1,b_2 后,在求 $\{b_n\}$ 的通项公式时思路受阻,先根据递推关系写出数列 a_n 的前 20 项,解出第二问,同时发现了数列 $\{a_n\}$ 的偶数项成等差数列,然后归纳得到 $b_{n+1}-b_n=3$, 求得 $b_n=3n-1$. 这里未严谨证明的要扣分.

命题意图剖析:本题是已知条件明确奇偶项的问题,第一问可以通过归纳推理得出数列 $\{b_n\}$ 是等差数列,再通过定义证明,第二问本质上是依托第一问得到的通项公式以及已知条件中相邻奇偶项之间的关系求解,本题从思维上讲是有一定难度的,可能是考虑第一道解答题尽量给学生拿分的想法,本题设置了求前 20 项的和.

解析:(1) 由题设可得 $b_1=a_2=a_1+1=2$, $b_2=a_4=a_3+1=a_2+2+1=5$, 又 $b_{n+1}=a_{2n+2}=a_{2n+1}+1=(a_{2n}+2)+1=b_n+3$, 即 $b_{n+1}-b_n=3$, 所以 $\{b_n\}$ 为等差数列,故 $b_n=2+(n-1)\times3=3n-1$.

(2) 设 $\{a_n\}$ 的前 20 项和为 S_{20}, 则 $S_{20}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$, 因为 $a_1=a_2-1, a_3=a_4-1,\cdots,a_{19}=a_{20}-1$, 所以 $S_{20}=2(a_2+a_4+\cdots+a_{18}+a_{20})-10=2(b_1+b_2+\cdots+b_9+b_{10})-10=2\times\dfrac{10\times(2+3\times10-1)}{2}-10=300$.

评析:对于奇偶项交叉递推关系给出的数列,我们一般利用递推关系得到奇数项或偶数项的通项公式,然后再讨论 n 的奇偶,分组求和,其中一组的和利用递推关系转化为另一组的和解决,当然本题也可以先分析得出 $\{a_n\}$ 的奇数项、偶数项分别成等差数列,然后求出 $\{a_{2n}\}$、$\{a_{2n-1}\}$ 的通项公式,再分组求和得到结果.

2　纵向对比

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1=1, a_2=2$, 且 $a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3, (n\in N^*)$. (1) 证明: $a_{n+2}=3a_n$; (2) 求 S_n. (2015 年湖南文第 19 题)

对比分析:本题虽然没有直接出现奇偶项字眼,但命题立意显然是考查数列奇偶项问题,第一问从思维难度上讲比今年的新高考试题要简单,第二问又比新高考试题要难,但从解决问题的方法上讲两者具有高度的一致性.

解析:(1) 对任意 $n\in N^*$, 有 $a_{n+2}=3S_n-S_{n+1}+3(n\in N^*)$, 因而对任意 $n\in N^*, n\geqslant2$, 有 $a_{n+1}=3S_{n-1}-S_n+3(n\in N^*)$, 两式相减得 $a_{n+2}-a_{n+1}=3a_n-a_{n+1}$, 即 $a_{n+2}=3a_n\quad(n\geqslant2)$, 又 $a_1=1, a_2=2$, 所以 $a_3=3S_1-S_2+3=3a_1-(a_1+a_2)+3=3a_1$, 故对一切 $n\in N^*$, $a_{n+2}=3a_n$.

(2)(方法一) 由 (1) 知 $a_n\neq0$, 所以 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=3$, 即数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是首项 $a_1=1$, 公比为 3 的等比数列,数