2019届考前模拟卷（六）解析

考纲梳理

通过研读2018年江苏省数学学科《考试说明》，预测2018年高考试卷会在保持基本稳定的基础上有所创新：(1)强调对主干内容的重点考查，体现对数学知识考查的全面性、基础性和综合性；(2)以能力立意为核心，坚持多角度、多层次地考查数学能力；(3)注重创新题型设计，综合、灵活地考查数学素养；(4)紧密结合社会实际和考生的现实生活，体现数学在解决实际问题中的重要作用和应用价值，体现应用性.

测试总评

通过测试，发现以下几种常见问题：(1)答题不规范，出现跳步和运用定理时条件列举不全的现象，如第15题的立体几何题；(2)实际应用问题中不能有效筛选和提取信息，从而无法顺利建模，如第17题是解析几何背景下的数学建模问题；(3)对于多考点的综合题，会因为其中某一个考点掌握不到位而导致整个题目出错等，如第9，18题是多考点的综合试题，对考生综合运用数学知识解决问题的能力有较高要求，很多考生会因为个别知识点掌握不扎实而出错.

针对以上问题，建议如下：(1)对于解答题，一定要重视解题过程的完整性，推导过程要有理有据，解答过程要详尽，不要错失步骤分；(2)要明确审题的重要性，审题是解题的前提和关键，尤其是新定义、实际应用问题等，只有在透彻理解题意的基础上，解题才能顺利完成；(3)在平时的学习过程中，要保证《考试说明》中的所有知识点全面过关，不留死角.

1.5 【命题意图】 本题考查集合的表示、集合的补运算，考查考生对基础知识的掌握情况.

【解题思路】 根据集合的补集的定义确定集合 A 中的元素，即可得到结果.

【解析】 由集合的补集的定义知，集合 $A=\{1,2,3\}$，所以 $x+y=5$.

2. -3 【命题意图】 本题考查双曲线的渐近线方程，直线的斜率等知识，考查考生对基础知识的掌握情况.

【解题思路】 根据双曲线的标准方程得到其渐近线方程，从而可得 k_1k_2 的值.

【解析】 由 $x^2-\frac{y^2}{3}=0$ 可得双曲线的渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$ 和 $y=-\sqrt{3}x$，所以 $k_1k_2=-3$.

3. $\sqrt{19}$ 【命题意图】 本题考查复数的四则运算和平面向量的模等知识，考查考生的运算求解能力.

【解题思路】 先根据复数的四则运算及复数相等确定 a,b 的值，从而可得向量 $\boldsymbol{m}$ 的坐标，再利用向量的模的计算公式得到结果.

【解析】 因为 $\frac{a}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=1-b\mathrm{i}$，所以 $a=(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(1-b\mathrm{i})=1+\sqrt{3}b+(\sqrt{3}-b)\mathrm{i}$，由复数相等得 $\begin{cases}a=1+\sqrt{3}b,\\ \sqrt{3}-b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\ b=\sqrt{3},\end{cases}$ 所以 $\boldsymbol{m}=(4,\sqrt{3})$，所以向量 $\boldsymbol{m}=(a,b)$ 的模为 $\sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{19}$.

【易错警示】 (1)在对 $\frac{a}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=1-b\mathrm{i}$ 进行化简的过程中，要注意 $\mathrm{i}^2=-1$，切勿以为 $\mathrm{i}^2=1$；(2)在计算向量 $\boldsymbol{m}=(a,b)$ 的模时，有考生误以为 $|\boldsymbol{m}|=4^2+(\sqrt{3})^2=19$.

4. $-\frac{14}{9}$ 【命题意图】 本题是三角函数的求值问题，主要考查两角和的余弦公式、二倍角公式等，考查考生的恒等变形能力以及运算求解能力.

【解题思路】 利用两角和的余弦公式、二倍角公式建立已知式子与待求式子的联系，代入数值即可得到结果.

【解析】 $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=2\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=2[2\cos^2(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12})-1]=2\times[2\times(\frac{1}{3})^2-1]=-\frac{14}{9}$.

5. $\frac{\pi}{6}$ 【命题意图】 本题考查空间几何体的表面积、正方体及其内切球之间的数量关系的运用，考查考生的运算求解能力以及空间想象能力.

【解题思路】 设正方体的棱长为 a，分别用 a 表示出 S_1,S_2，即可得结果.

【解析】 设正方体的棱长为 $a(a>0)$，则其内切球的半径为 $\frac{a}{2}$，则 $S_1=6a^2$，$S_2=4\pi(\frac{a}{2})^2=\pi a^2$，所以 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{\pi}{6}$.

6. $\frac{2}{5}$ 【命题意图】 本题主要考查古典概型的概率计算，考查考生的运算求解能力.

【解题思路】 先列举出所有数字之和为5的两位数，再从中找出十位数字是偶数的两位数，最后利用古典概型的概率计算公式得到结果.

【解析】 所有数字之和为5的两位数有14，23，32，41，50，共5个，其中十位数字是偶数的有23，41，共2个，所以十位数字是偶数的概率 $P=\frac{2}{5}$.

7.1 【命题意图】 本题考查平面向量的数量积、向量的模等知识，考查考生的运算求解能力.

【解题思路】 先根据题意得到 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，再将 $x\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ 的两边平方，代入可得结果.

【解析】 因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是平面内的三个单位向量，所以 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，将 $x\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ 两边平方得 $x^2\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{a}^2+2y\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+y^2\boldsymbol{b}^2$，所以 $x^2=1+y^2$，所以 $x^2-y^2=1$.

8.1 【命题意图】 本题主要考查算法流程图、分段函数函数值的计算，考查考生的识图能力以及运算求解能力.

【解题思路】 先观察算法流程图，得出该算法流程图确定的函数，然后根据题中条件确定 a 的值，最后代入计算函数值可得结果.

【解析】 由算法流程图可知，当 $x>1$ 时，输出 $y=ax-2$；当 $x\leqslant 1$ 时，输出 $y=(\frac{1}{2})^x-a$，即算法流程图确定的函数为 $y=f(x)=\begin{cases}ax-2,x>1,\\(\frac{1}{2})^x-a,x\leqslant 1,\end{cases}$ 由 $f(-1)=1$，知 $a=1$，

所以 $f(x)=\begin{cases}x-2,x>1,\\(\frac{1}{2})^x-1,x\leqslant 1,\end{cases}$ 所以 $f(3)+f(0)=1$.

9. $\frac{2}{3}$ 【命题意图】 本题主要考查一元二次不等式的解集、平均数和方差、对数运算等，考查考生的运算求解能力.

【解题思路】 先利用平均数与方差的计算公式得到 a,b 的值，然后根据一元二次不等式的解集确定 m,n，最后利用对数运算得到结果.

【解析】 由题意得 $a=\frac{2+3+4+5+6}{5}=4$，

$b=\frac{(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2}{5}=2$，

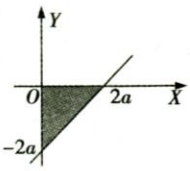
所以关于 x 的一元二次不等式 $x^2-mx+n<0$ 的解集为 $(2,4)$，所以2，4是一元二次方程 $x^2-mx+n=0$ 的两个根，由根与系数的关系得 $m=2+4=6$，$n=2\times4=8$，所以 $\log_n(m-2)=\log_8 4=\frac{2}{3}$.

【名师指引】 (1)涉及数据的平均数、方差与标准差的计算问题的求解关键是弄清有关概念，记住相关计算公式. (2)一元二次不等式的有限解集的端点是对应的一元二次方程的根，也是对应的二次函数的图象与 x 轴交点的横坐标，解题时要注意"三个二次"之间的灵活转化.

10.1 【命题意图】 本题主要考查线性规划、二元一次不等式组所表示的平面区域等知识，考查运用换元法及数形结合思想分析问题和解决问题的能力.

【解题思路】 先换元，令 $x+y=X$，$x-y=Y$，将集合 N 转化为常见的有序实数对的形式，然后画出其表示的平面区域，最后通过面积为2求出 a 的值.

【解析】 设 $x+y=X$，$x-y=Y$，所以点集 N 可化为 $\{(X,Y)|\begin{cases}Y\leqslant 0,\\X\geqslant 0,\\X-Y\leqslant 2a\end{cases}\}$，它所表示的平面区域如图中阴影部分所示，其为一个等腰直角三角形，腰长为 $2a(a>0)$，故其面积 $S=2=\frac{1}{2}\times 2a\times 2a=2a^2$，所以 $a=1$.



11. $\frac{9}{2}$ 【命题意图】 本题考查二次函数的最值、基本不等式的应用等知识，考查考生的运算求解能力以及分析问题、解决问题的能力.

【解题思路】 先利用二次函数的最值或者基本不等式得 $f(x)$ 的最小值，再根据 $f(x)$ 的最小值为2确定 a,b 之间的关系，最后利用基本不等式得到结果.

【解析】 **解法一** $f(x)=(x+2a)^2+(x-b)^2=2x^2+2(2a-b)x+4a^2+b^2=2(x+\frac{2a-b}{2})^2+\frac{(2a+b)^2}{2}$，当且仅当 $x=-\frac{2a-b}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=\frac{(2a+b)^2}{2}=2$. 因为 a,b 均为正数，所以 $2a+b=2$，所以 $\frac{2}{a}+$

$\frac{1}{b}=(\frac{2}{a}+\frac{1}{b})(a+\frac{b}{2})=\frac{5}{2}+(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})\geqslant\frac{9}{2}$,当且仅当 $a=b=\frac{2}{3}$ 时取等号,所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$.

解法二 由基本不等式得,$f(x)=(x+2a)^2+(x-b)^2\geqslant\frac{(x+2a+b-x)^2}{2}$,当且仅当 $2a+x=b-x$,即 $x=-\frac{2a-b}{2}$ 时等号成立,所以 $f(x)_{\min}=\frac{(2a+b)^2}{2}=2$. 因为 a,b 均为正数,所以 $2a+b=2$,即 $b=2-2a>0$,得 $0<a<1$. 将 $b=2-2a$ 代入 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 得,$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{a}+\frac{1}{2-2a}=\frac{4-3a}{2a(1-a)}$,

令 $4-3a=t\in(1,4)$,则 $a=\frac{4-t}{3}$,$1-a=\frac{t-1}{3}$,$\frac{4-3a}{2a(1-a)}=\frac{9}{2[5-(t+\frac{4}{t})]}\geqslant\frac{9}{2}$,当且仅当 $t=2$,即 $a=b=\frac{2}{3}$ 时等号成立,所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$.

12. $\frac{4}{3}$ **【命题意图】** 本题考查直线方程、圆的方程、直线与圆的位置关系、点到直线的距离等知识,考查考生的运算求解能力以及分析问题、解决问题的能力.

【解题思路】 **通解** 分 $b=0$ 和 $b\neq0$ 两种情况,分别确定 x_1x_2,y_1y_2 的值,代入已知等式进行化简即可得到结果;**优解** 先将 $x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}r^2$ 转化为平面向量的数量积,得出 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$,进而得到圆心到直线的距离,再利用点到直线的距离公式求解.

【解析】 **通解** 由题意知 a,b 不同时为 0. ①当 $b=0$ 时,有 $x_1=x_2=-\frac{c}{a}$,$x_1x_2=\frac{c^2}{a^2}$,$y_1y_2=\frac{c^2}{a^2}-r^2$,代入 $x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}r^2$,得 $\frac{2c^2}{a^2}-r^2=\frac{1}{2}r^2$,所以 $\frac{r^2(a^2+b^2)}{c^2}=\frac{4}{3}$. ②当 $b\neq0$ 时,与圆 O 的方程联立消去 y 得 $(a^2+b^2)x^2+2acx+c^2-b^2r^2=0$,则 $x_1+x_2=-\frac{2ac}{a^2+b^2}$,$x_1x_2=\frac{c^2-b^2r^2}{a^2+b^2}$,$y_1y_2=\frac{(ax_1+c)(ax_2+c)}{b^2}=\frac{c^2-a^2r^2}{a^2+b^2}$,将 x_1x_2,y_1y_2 代入 $x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}r^2$,得 $\frac{r^2(a^2+b^2)}{c^2}=\frac{4}{3}$. 综上,$\frac{r^2(a^2+b^2)}{c^2}=\frac{4}{3}$.

优解 由题意知 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}r^2$,又 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=r^2\cos\angle AOB$,所以 $\cos\angle AOB=\frac{1}{2}$,所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$,从而得圆心 O 到直线 $ax+by+c=0$ 的距离 $d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$,所以 $\frac{r^2(a^2+b^2)}{c^2}=\frac{4}{3}$.

13. $(0,\frac{1}{2e})$ **【命题意图】** 本题主要考查分段函数、导数的应用、函数的极值点等知识,考查等价转化思想、数形结合思想,考查考生的运算求解能力以及分析问题和解决问题的能力.

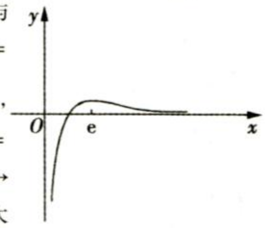
【解题思路】 对 $f(x)$ 求导,根据题意得到 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个变号零点. **通解** 构造新函数并求导,分类讨论函数的单调性及零点情况,确定实数 m 的取值范围;**优解** 进一步将问题转化为直线 $y=2m$ 与 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的图象有两个交点,数形结合得到结果.

【解析】 由题意知,$f(x)$ 的导函数 $f'(x)=\begin{cases}2x+n,x<0,\\2mx-\ln x,x>0\end{cases}$ 在定义域上有三个变号零点.

因为 $n>0$,所以 $-\frac{n}{2}$ 是 $f'(x)$ 的一个变号零点,故需 $f'(x)=2mx-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个变号零点.

通解 记 $h(x)=2mx-\ln x$,则 $h'(x)=2m-\frac{1}{x}$,当 $m\leqslant0$ 时,$h'(x)<0$ 恒成立,$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,$f'(x)=2mx-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不可能有两个变号零点. 当 $m>0$ 时,由 $h'(x)=2m-\frac{1}{x}=0$ 得 $x=\frac{1}{2m}$,所以 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2m})$ 上单调递减,在 $(\frac{1}{2m},+\infty)$ 上单调递增,所以 $h(x)_{\min}=h(\frac{1}{2m})=1+\ln 2m$,令 $h(x)_{\min}<0$,解得 $0<m<\frac{1}{2e}$,这时 $h(m)=2m^2-\ln m=2m^2+\ln\frac{1}{m}>2m^2+1+\ln 2>0$,$h((\frac{1}{2m})^2)=\frac{1}{2m}-2\ln\frac{1}{2m}$,设 $\frac{1}{2m}=t>e$,$r(t)=t-2\ln t$,则 $r'(t)=1-\frac{2}{t}>0$,所以 $r(t)=t-2\ln t$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增,所以 $r(t)=t-2\ln t>e-2>0$,即 $h((\frac{1}{2m})^2)>0$. 所以当 $m\in(0,\frac{1}{2e})$ 时,$f'(x)=2mx-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个变号零点. 所以所求 m 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2e})$.

优解 进一步将问题转化为直线 $y=2m$ 与 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的图象有两个交点. 因为 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,所以 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增,在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$,又当 $x>1$ 时,$g(x)>0$,当 $x\to0$ 时,$g(x)\to-\infty$,所以可作出 $g(x)$ 的大致图象如图所示,数形结合可知,当且仅当 $0<2m<\frac{1}{e}$,即 $0<m<\frac{1}{2e}$ 时,直线 $y=2m$ 与 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的图象有两个交点. 所以当函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+nx,x<0,\\mx^2-x\ln x+x,x>0\end{cases}$ 恰有三个极值点时,实数 m 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2e})$.



【解后反思】 在求解本题时,可以明显感受到数形结合思想对于快速解题的重要性. 若采用数形结合的方法将问题转化为直线 $y=2m$ 与 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的图象有两个交点,则作出简图即可快速分析出实数 m 的取值范围;若不利用数形结合的方法,则需要构造新函数并求导,分类讨论函数的单调性及零点情况,最终确定实数 m 的取值范围,过程较为复杂.

14. 1 **【命题意图】** 本题考查数列的递推关系、等比数列的概念及通项公式、等差数列的性质等知识,考查考生灵活运用所学知识进行分析、推理的能力.

【解题思路】 将 $a_n=2a_{n-1}-3(-1)^n(n\geqslant2)$ 转化为 $a_n+(-1)^n=2[a_{n-1}+(-1)^{n-1}]$ 后,令 $b_n=a_n+(-1)^n$,得数列 $\{b_n\}$ 是等比数列,从而得到 a_n,利用等差数列的性质,分析可得结果.

【解析】 $a_n=2a_{n-1}-3(-1)^n(n\geqslant2)$ 可化为 $a_n+(-1)^n=2[a_{n-1}+(-1)^{n-1}]$,令 $b_n=a_n+(-1)^n$,则有 $b_n=2b_{n-1}$,又 $b_1=a_1-1=2$,所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2,公比为 2 的等比数列,所以 $b_n=2^n$,所以 $a_n=2^n-(-1)^n$. 依题意,a_1,a_{k_2},a_{k_3} 成等差数列,即 $2a_{k_2}=a_1+a_{k_3}$,从而 $2[2^{k_2}-(-1)^{k_2}]=3+2^{k_3}-(-1)^{k_3}$,

当 k_2,k_3 均为奇数时,$2^{k_2}-2^{k_3-1}=1$,左边为偶数,右边为奇数,故等式不成立;

当 k_2,k_3 均为偶数时,$2^{k_2-1}-2^{k_3-2}=1$,左边为偶数,右边为奇数,故等式不成立;

当 k_2 为偶数,k_3 为奇数时,$2^{k_2+1}-2^{k_3}=6$,左边为偶数,因为 $k_3>k_2$,所以 $k_3\geqslant k_2+1$,所以 $2^{k_2+1}-2^{k_3}\leqslant0$,故等式不成立;

当 k_2 为奇数,k_3 为偶数时,$2^{k_2+1}-2^{k_3}=0$,即 $k_3-k_2=1$.

综上,$k_3-k_2=1$.

【解题关键】 解决本题的关键是根据递推关系式 $a_n=2a_{n-1}-3(-1)^n(n\geqslant2)$ 可联想到 $\{a_n+(-1)^n\}$ 为等比数列,进而得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,若想到这一点,解题方可继续进行;若想不到这一点,则本题很难正确求解.

15. **【命题意图】** 本题主要考查空间中线面平行的性质、面面垂直的性质、线面垂直的判定、平行四边形的判定等,考查考生的空间想象能力和推理论证能力.

【解题思路】 对于(1),将线面平行转化为线线平行,即证得 $EF\parallel PA$,进而得到 F 为 AC 的中点,从而可得结论;对于(2),先证 $AB\perp$ 平面 PBD,由线面垂直的性质定理可得 $AB\perp DP$,再由线面垂直的判定定理证明结论.

解:(1)因为 $EF\parallel$ 平面 PAD,平面 $PAD\cap$ 平面 $PAC=PA$,$EF\subset$ 平面 PAC,

所以 $EF\parallel PA$. (4分)

因为 E 为 PC 的中点,所以 F 为 AC 的中点, (5分)

又 F 为 BD 的中点,

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. (7分)

(2)因为平面 $PBD\perp$ 平面 ABD,平面 $PBD\cap$ 平面 $ABD=BD$,$AB\subset$ 平面 ABD,$AB\perp BD$,

所以 $AB\perp$ 平面 PBD, (10分)

因为 $DP\subset$ 平面 PBD,所以 $AB\perp DP$, (12分)

因为 $DP\perp PB$,$AB\cap PB=B$,所以 $DP\perp$ 平面 PBA. (14分)

【名师指引】 对于第(1)问,通常是将线面平行转化为线线平行,关键是找出过已知直线的平面与已知平面的交线,即本题中的 PA;对于第(2)问,要证线面垂直,由线面垂直的判定定理知可先证明线线垂直,要证线线垂直,又要考虑线面垂直,结合平面 $PBD\perp$ 平面 ABD,$AB\perp BD$,不难证明结论.

16.【命题意图】 本题考查两角和的正切公式、同角三角函数的基本关系、正弦定理、三角形的面积公式等知识，考查考生综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力以及运算求解能力.

【解题思路】 (1)由$\angle BAC=\angle BAD+\angle CAD$，结合两角和的正切公式即可求解；(2)先根据题意得$\sin\angle BAD=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\angle CAD=\frac{\sqrt{10}}{10}$，再根据正弦定理可得$\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{AC}{\sin B}$，$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AD}{\sin B}$，可得$\frac{AC}{AD}=\frac{\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{4}}}{\frac{BD}{\sin\angle BAD}}$，根据$BC=2BD$化简即可求得$AC$，同理可求得$AB$，最后利用三角形的面积公式求解即可.

解：(1)因为$\tan\angle BAD=\frac{1}{2}$，$\tan\angle CAD=\frac{1}{3}$，

所以在$\triangle ABC$中，$\tan\angle BAC=\tan(\angle BAD+\angle CAD)=\frac{\tan\angle BAD+\tan\angle CAD}{1-\tan\angle BAD\cdot\tan\angle CAD}=$

$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$， (4分)

因为$0<\angle BAC<\pi$，所以$\angle BAC=\frac{\pi}{4}$. (5分)

(2)由$\tan\angle BAD=\frac{1}{2}$，$\tan\angle CAD=\frac{1}{3}$，

可得$\sin\angle BAD=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\angle CAD=\frac{\sqrt{10}}{10}$. (7分)

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{AC}{\sin B}$，

在$\triangle ABD$中，由正弦定理得$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AD}{\sin B}$，

故$\frac{AC}{AD}=\frac{\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{4}}}{\frac{BD}{\sin\angle BAD}}$， (9分)

又$BC=2BD$，所以$\frac{AC}{AD}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$. (10分)

因为$AD=\sqrt{10}$，所以$AC=4$. (11分)

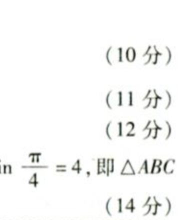
同理可得$AB=2\sqrt{2}$， (12分)

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times4\sin\frac{\pi}{4}=4$，即$\triangle ABC$的面积为4. (14分)

【名师预测】 三角函数与解三角形解答题经常在15,16题的位置，试题的难度不大，主要题型有：(1)三角求值(证明)问题；(2)涉及解三角形的综合性问题；(3)三角函数的最小正周期、单调区间、最值及图象的对称轴问题；(4)三角函数与平面向量、导数知识的交汇问题.求解三角函数问题的关键是三角恒等变换，其解题通法是：发现差异(角度、运算结构)，寻找联系(套用、变用、活用公式，注意技巧和方法)，合理转化(由因导果的综合法，由果探因的分析法).解三角形问题多为边和角的求值问题，需要根据正、余弦定理，结合已知条件灵活转化边和角之间的关系，从而达到解决问题的目的.

17.【命题意图】 本题是一道数学实际应用题，考查运用导数求函数的最值、椭圆的标准方程、圆的方程、三角函数的最值等知识，考查考生的数学建模能力和分析问题、解决问题的能力.

【解题思路】 对于(1)，设$C(x,y)(0<x<1,0<y<2)$，将四边形$ABCD$的面积表示为x的函数，再构造函数$f(x)=4(1+x)^2(1-x^2)$，运用导数求最值即可；对于(2)，首先要探究出符合条件的点P在以AD为直径的圆上，再将观景拱桥的总长最长转化为直角三角形APD中的两条直角边和斜边上的高之和最大进行求解.



解：以椭圆形人工湖面正中间的东西轴线为x轴，南北轴线为y轴建立如图所示的平面直角坐标系，则由题意可得椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{4}+x^2=1$. (2分)

(1)设$C(x,y)(0<x<1,0<y<2)$，

则$y=2\sqrt{1-x^2}$，设由环湖观景长廊所围成的四边形$ABCD$的面积为S，

则由椭圆的对称性知$S=\frac{1}{2}(2+2x)y=2(1+x)\sqrt{1-x^2}(0<x<1)$， (4分)

所以$S^2=4(1+x)^2(1-x^2)$，

记$f(x)=4(1+x)^2(1-x^2)$，

则$f'(x)=8(1+x)^2(1-2x)$，

由$f'(x)=0$得$x=\frac{1}{2}$，

所以$f(x)$在$(0,\frac{1}{2})$上单调递增，在$(\frac{1}{2},1)$上单调递减，

所以当$x=\frac{1}{2}$时，$f(x)_{\max}=\frac{27}{4}$，

所以由环湖观景长廊所围成的四边形$ABCD$的面积的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$平方百米. (6分)

(2)设$P(m,n)$，其中$n<0$，

则由$RQ\perp AD$于Q，P为QR的中点得$R(m,2n)$，

代入椭圆方程得$m^2+n^2=1$，

即点P在以AD为直径的圆上，所以$PA\perp PD$. (8分)

设$\angle ADP=\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，$AP,PD,PR$三座游览观景拱桥的总长为$l$，

则$l=AP+PD+PR=AP+PD+PQ=2\sin\alpha+2\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$. (10分)

设$\sin\alpha+\cos\alpha=t$，则$2\sin\alpha\cos\alpha=t^2-1(1<t\leqslant\sqrt{2})$，

所以$l=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$，当且仅当$t=\sqrt{2}$时，$l_{\max}=2\sqrt{2}+1$，

此时$\alpha=\frac{\pi}{4}$，即此时点P位于南北轴线上且距长廊AD向南1百米处. (13分)

所以当点P位于南北轴线上且距长廊AD向南1百米处时，AP,PD,PR三座游览观景拱桥的总长最长. (14分)

【解后反思】 求解本题的关键是建立平面直角坐标系，得到椭圆的标准方程.第(1)问的解题技巧是将面积S表示为x的函数之后，考虑用S^2来确定S的最值；第(2)问求解的关键在于分析出点P在以AD为直径的圆上.

18.【命题意图】 本题主要考查直线方程、圆的方程、椭圆的方程、弦长公式、直线与椭圆的位置关系、基本不等式等知识，考查考生的运算求解能力以及利用所学知识分析和解决问题的能力.

【解题思路】 对于(1)，利用离心率得$b=c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，写出当直线AB的倾斜角$\alpha=\frac{\pi}{3}$时直线AB的方程，求出点到直线的距离，进而得到弦长，求得b，从而求得椭圆的方程；对于(2)中的①，要对直线AB的斜率分情况讨论，对于斜率存在且不为0的情形，首先利用弦长公式将m,n用直线AB的斜率k表示出来，再求$(m-4)(n-4)$的值，对于②，由①可得$mn=4(m+n)$，利用基本不等式求四边形面积的最小值，利用基本不等式等号成立的条件即可求得此时直线AB的方程.

解：(1)由椭圆的离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又$a^2=b^2+c^2$，所以$b=c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. (1分)

当$\alpha=\frac{\pi}{3}$时，直线AB的方程为$y=\sqrt{3}(x-b)$，即$\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}b=0$，

圆心O到直线AB的距离$d=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，截得的弦长为$2\sqrt{b^2-(\frac{\sqrt{3}}{2}b)^2}=b=3\sqrt{2}$，

所以$a=\sqrt{2}b=6$. (3分)

故所求椭圆的方程是$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{18}=1$. (4分)

(2)①由(1)知椭圆的右焦点$F_2(3\sqrt{2},0)$.

分如下三种情况讨论：

1°当直线AB的斜率不存在时，AB的方程为$x=3\sqrt{2}$，则CD的方程为$y=0$，此时$m=6,n=12$，

所以$(m-4)(n-4)=16$. (5分)

2°当直线AB的斜率为0时，AB的方程为$y=0$，CD的方程为$x=3\sqrt{2}$，此时$m=12,n=6$，

所以$(m-4)(n-4)=16$. (6分)

3°当直线AB的斜率存在且不为0时，

设AB的方程为$y=k(x-3\sqrt{2})(k\neq0)$，则CD的方程为$y=-\frac{1}{k}(x-3\sqrt{2})$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立得$\begin{cases}y=k(x-3\sqrt{2}),\\x^2+2y^2=36,\end{cases}$

消去y并化简得$(2k^2+1)x^2-12\sqrt{2}k^2x+36k^2-36=0$， (8分)

所以$x_1+x_2=\frac{12\sqrt{2}k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{36k^2-36}{2k^2+1}$，

$m=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=$

$\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\dfrac{288k^4-144(k^2-1)(2k^2+1)}{(2k^2+1)^2}}=\dfrac{12(k^2+1)}{2k^2+1}$. (10分)

同理可得 $n=\dfrac{12(1+k^2)}{2+k^2}$, (11分)

所以 $(m-4)(n-4)=[\dfrac{12(k^2+1)}{2k^2+1}-4][\dfrac{12(1+k^2)}{2+k^2}-4]=\dfrac{4(k^2+2)}{2k^2+1}\times\dfrac{4(1+2k^2)}{2+k^2}=16$. (12分)

综上,$(m-4)(n-4)=16$. (13分)

②由①得 $mn=4(m+n)$,由题意知 $m>0,n>0$,所以 $mn=4(m+n)\geqslant 8\sqrt{mn}$,所以 $mn\geqslant 64$,当且仅当 $m=n=8$ 时等号成立,

设四边形 $ACBD$ 的面积为 S,则 $S=\dfrac{1}{2}mn\geqslant 32$, (15分)

此时 $\dfrac{12(k^2+1)}{2k^2+1}=8$,解得 $k=\pm1$,

所以直线 AB 的方程为 $x-y-3\sqrt{2}=0$ 或 $x+y-3\sqrt{2}=0$. (16分)

【易错警示】 对于本题第(2)问的①,要注意对直线 AB 的斜率进行分类讨论,同时对于点 A,B 的坐标,要考虑用设而不求的方法,结合根与系数的关系代入化简,不要直接求出坐标再代入,这样会增加运算量;对于②,在运用基本不等式求最小值时,要注意等号成立的条件,这是求直线斜率的关键.

19.【命题意图】 本题考查函数与导数的综合应用,考查考生综合运用数学知识分析问题、解决问题以及逻辑推理的能力.

解:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=x+\ln x$,定义域为 $(0,+\infty)$.

所以 $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+1}{x}$.

所以 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$. (3分)

(2)①由题意可得,关于 x 的方程 $\dfrac{x^2}{x-\ln x}=ax+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有三个不同的解,

即关于 x 的方程 $a=\dfrac{x}{x-\ln x}-\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有三个不同的解.

令 $F(x)=\dfrac{x}{x-\ln x}-\dfrac{\ln x}{x}$,$x\in(0,+\infty)$,则函数 $F(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有三个不同的交点. (5分)

$F'(x)=\dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}-\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{\ln x(1-\ln x)(2x-\ln x)}{x^2(x-\ln x)^2}$,

显然,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$2x-\ln x>0$,证明如下:

令 $y=2x-\ln x(x>0)$,则 $y'=2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-1}{x}$.

当 $x\in(0,\dfrac{1}{2})$ 时,$y'<0$,函数 $y=2x-\ln x$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上单调递减;

当 $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 时,$y'>0$,函数 $y=2x-\ln x$ 在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,$y=2x-\ln x$ 取得极小值,也是最小值 $1-\ln\dfrac{1}{2}=1+\ln 2>0$.

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$2x-\ln x>0$. (7分)

令 $F'(x)=0$,可得 $x=1$ 或 e.

随着 x 的变化,$F'(x)$,$F(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0,1)$	1	$(1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以 $F(x)$ 的极小值为 $F(1)=1$,极大值为 $F(e)=\dfrac{e}{e-1}-\dfrac{1}{e}$,数形结合可知,实数 a 的取值范围为 $(1,\dfrac{e}{e-1}-\dfrac{1}{e})$. (10分)

②由①可知,$0<x_1<1<x_2<e<x_3$,$a=\dfrac{x}{x-\ln x}-\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{1-\dfrac{\ln x}{x}}-\dfrac{\ln x}{x}$.

令 $t=\dfrac{\ln x}{x}$,则 $a=\dfrac{1}{1-t}-t$,

即 $t^2+(a-1)t+1-a=0$,$\Delta=(a-1)^2-4(1-a)=(a+3)(a-1)>0$,设关于 t 的方程的两根分别为 t_1,t_2,则 $t_1+t_2=1-a<0$,$t_1t_2=1-a<0$, (12分)

不妨设 $t_1<t_2$,则 $t_1<0<t_2$.

又 $t(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$,$t'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,

当 $x\in(0,e)$ 时,$t'(x)>0$,$t(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增;

当 $x\in(e,+\infty)$ 时,$t'(x)<0$,$t(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

显然,当 $x\in(0,1)$ 时,$t(x)<0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$t(x)>0$,

所以 $t_1=\dfrac{\ln x_1}{x_1}$,$t_2=\dfrac{\ln x_2}{x_2}=\dfrac{\ln x_3}{x_3}$. (14分)

所以 $(1-\dfrac{\ln x_1}{x_1})^2(1-\dfrac{\ln x_2}{x_2})(1-\dfrac{\ln x_3}{x_3})$

$=(1-\dfrac{\ln x_1}{x_1})^2(1-\dfrac{\ln x_2}{x_2})^2$

$=[(1-t_1)(1-t_2)]^2$

$=[1-(t_1+t_2)+t_1t_2]^2$

$=[1-(1-a)+(1-a)]^2$

$=1$,

所以 $(1-\dfrac{\ln x_1}{x_1})^2(1-\dfrac{\ln x_2}{x_2})(1-\dfrac{\ln x_3}{x_3})=1$. (16分)

【解后反思】 函数是高中数学中起支撑作用的主干知识,通过研究高考的函数题可以看出:导数的考查思路比较清晰;重视分类讨论、数形结合、函数与方程等基本数学思想的考查;重视新定义函数,挖掘所定义新函数的性质和特点,并在此基础上灵活设计问题;重视推理论证能力的考查;把对函数的概念、性质、图象及导数等基础知识的考查融入到所设计的问题当中;重视考查探索、分析、解决新问题的综合能力.

20.【命题意图】 本题考查一元二次方程根与系数的关系、数列的通项公式、错位相减法求和、累加法求通项公式等,考查考生综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力以及运算求解能力.

【解题思路】 (1)首先由一元二次方程根与系数的关系得到 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$ 和 $2^{b_n}=a_na_{n+1}$,用累加法求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,然后代入 $2^{b_n}=a_na_{n+1}$ 得数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;(2)运用错位相减法求和即可;(3)先确定 T_n,从而用 k 表示出 $\dfrac{T_{k+1}T_{k+2}}{T_k^2}$,然后确认 $k=1,2$ 符合题意,再说明 $k\geqslant3$ 时,$\dfrac{T_{k+1}T_{k+2}}{T_k^2}$ 不是整数即可.

解:(1)因为 $-a_n$ 和 a_{n+1} 是关于 x 的方程 $x^2-2^{n-1}x-2^{b_n}=0$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的两个实根,

所以 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$,且 $-2^{b_n}=-a_na_{n+1}$,即 $2^{b_n}=a_na_{n+1}$. (2分)

由 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$,得 $a_n-a_{n-1}=2^{n-2}$,$a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-3}$,$\cdots$,$a_3-a_2=2^1$,$a_2-a_1=2^0$,

将以上各式累加可得 $a_n-a_1=2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2^1+2^0=\dfrac{1\times(1-2^{n-1})}{1-2}=2^{n-1}-1$,

又 $a_1=1$,所以 $a_n=2^{n-1}$, (4分)

所以 $2^{b_n}=a_na_{n+1}=2^{2n-1}$,所以 $b_n=2n-1$. (5分)

(2)由(1)知,$a_nb_n=(2n-1)2^{n-1}$,

所以 $S_n=1\times1+3\times2+5\times2^2+7\times2^3+\cdots+(2n-3)\times2^{n-2}+(2n-1)\times2^{n-1}$,

$2S_n=1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-3)\times2^{n-1}+(2n-1)\times2^n$, (7分)

故 $-S_n=1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-(2n-1)\cdot2^n$

$=(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)-1-(2n-1)\cdot2^n$

$=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}-1-(2n-1)\cdot2^n$

$=(3-2n)\cdot2^n-3$, (9分)

所以 $S_n=(2n-3)\cdot2^n+3$. (10分)

(3)由(1)知 $T_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$,

所以 $\dfrac{T_{k+1}T_{k+2}}{T_k^2}=[\dfrac{(k+1)(k+2)}{k^2}]^2=(1+\dfrac{3k+2}{k^2})^2$. (12分)

显然,$k=1,2$ 满足条件,

当 $k=3$ 时,$\dfrac{T_{k+1}T_{k+2}}{T_k^2}=(1+\dfrac{11}{9})^2$ 不是整数. (13分)

当 $k\geqslant4$ 时,因为 $k^2-3k-2=k(k-3)-2\geqslant4(4-3)-2=2>0$,

所以 $0<\dfrac{3k+2}{k^2}<1$,

所以 $1<1+\dfrac{3k+2}{k^2}<2$,$\dfrac{T_{k+1}T_{k+2}}{T_k^2}$ 不是整数. (15分)

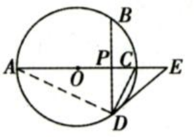
综上所述,正整数 k 的取值集合为 $\{1,2\}$. (16分)

【解题关键】 对于(1),求解数列 $\{b_n\}$ 的通项公式的前提是利用一元二次方程根与系数的关系建立 a_n,b_n 的关系,解题的关键是由数列 $\{a_n\}$ 的递推关系联想到运用累加法求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;对于(2),求解的关键是正确选择求和方法;对于(3),求解的关键在于对 $\dfrac{T_{k+1}T_{k+2}}{T_k^2}$ 的合理化简与正确分析.

21. A.[选修4-1:几何证明选讲]

【命题意图】 本题考查弦切角定理、直角三角形的性质、相交弦定理等知识,考查考生的运算求解能力.

【解题思路】 利用弦切角定理、正切函数的定义建立 DP 与 r 之间的关系是解题的关键.



解:如图,连接 AD,由 DE 切圆 O 于 D,得 $\angle CAD=\angle CDE$. (2分)

因为 AC 为圆 O 的直径,所以 $AD\perp DC$,且 $BD\perp AC$,

所以 $\tan\angle PAD=\dfrac{PD}{AP}=\tan\angle CAD=\tan\angle CDE=\dfrac{1}{2}$. (4分)

又 $AP=3+r$,所以 $PD=\dfrac{1}{2}(r+3)$. (6分)

由圆的相交弦定理得 $DP^2=PC\cdot PA$, (8分)

又 $CP=r-3$,所以 $[\dfrac{1}{2}(r+3)]^2=(r-3)(r+3)$,得 $r=5$. (10分)

B.[选修4-2:矩阵与变换]

【命题意图】 本题考查矩阵与变换、矩阵的特征多项式和特征值、二阶矩阵与平面列向量的乘法,考查考生的运算求解能力.

【解题思路】 先利用特征多项式求解 a,b 的值,从而可得矩阵 $\boldsymbol{M}$,再将矩阵对应的变换转化为二阶矩阵与平面列向量的乘法进行计算即可.

解:设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值,

则 $f(\lambda)=\begin{vmatrix} a-\lambda & 2 \\ b & 2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(2+a)\lambda+2a-2b$. (2分)

由题意知4和-1是 $f(\lambda)=0$ 的两个实根,

则 $\begin{cases}4+(-1)=2+a,\\4\times(-1)=2a-2b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=3,\end{cases}$ (6分)

所以 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}$, (7分)

所以 $\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$,所以所求点 B 的坐标为 $(3,5)$. (10分)

C.[选修4-4:坐标系与参数方程]

【命题意图】 本题考查极坐标方程与直角坐标方程的互化、平面上两点间距离的最小值等知识,考查考生的运算求解能力.

【解题思路】 利用极坐标与直角坐标的互化公式 $\rho^2=x^2+y^2$,$\rho\cos\theta=x$,$\rho\sin\theta=y$ 可得曲线 C_1 的直角坐标方程,同理可得 C_2 的直角坐标方程,从而将所求最小值转化为圆上的点到直线的距离的最小值.

解:因为 $\rho^2=x^2+y^2$,$\rho\cos\theta=x$,$\rho\sin\theta=y$,

所以 $\rho^2-4\rho\cos\theta+3=0$,即 $x^2+y^2-4x+3=0$.

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x+3=0$,即 $(x-2)^2+y^2=1$. (4分)

同理可得曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y+6=0$. (6分)

圆心 $C_1(2,0)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y+6=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2-0+6|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=4$,

所以 $PQ_{\min}=4-1=3$. (10分)

D.[选修4-5:不等式选讲]

【命题意图】 本题考查不等式恒成立、绝对值三角不等式的应用和分式不等式的解法,考查考生分析问题、解决问题的能力以及运算求解能力.

【解题思路】 先运用绝对值三角不等式求得 $|x+\dfrac{2}{a}|+|x-a|$ 的最小值为 $a+\dfrac{2}{a}$,再解不等式 $a+\dfrac{2}{a}\geqslant3$ 即可.

解:因为 $a>0$,所以由绝对值三角不等式得 $|x+\dfrac{2}{a}|+|x-a|\geqslant|(x+\dfrac{2}{a})-(x-a)|=|\dfrac{2}{a}+a|$, (4分)

当且仅当 $-\dfrac{2}{a}\leqslant x\leqslant a$ 时等号成立,所以 $(|x+\dfrac{2}{a}|+|x-a|)_{\min}=a+\dfrac{2}{a}$, (7分)

由 $a+\dfrac{2}{a}\geqslant3$,得 $a\geqslant2$ 或 $0<a\leqslant1$,故正数 a 的取值范围为 $(0,1]\cup[2,+\infty)$. (10分)

22.【命题意图】 本题考查分类加法计数原理与分步乘法计数原理、随机变量的分布列和数学期望等,考查考生的运算求解能力、阅读理解能力、提取信息的能力以及应用意识.

【解题思路】 (1)易知基本事件总数为 5^5,利用分类加法计数原理与分步乘法计数原理确定满足题意的基本事件数,最后利用古典概型的概率计算公式得结果;(2)分析可知随机变量 X 的所有可能的取值为1,2,3,4,5,分别计算出相应的概率,列表并计算即可.

解:(1)记"此人在这连续五天的出行中共选择了三种共享单车"为事件 M,

则事件 M 包含"某种共享单车用三天,另有两种共享单车各用一天"、"某种共享单车用一天,另有两种共享单车各用两天"两种情况.

所以 $P(M)=\dfrac{C_5^3(C_5^3\cdot C_3^1\cdot A_2^2+C_3^1\cdot C_5^1\cdot C_4^2)}{5^5}=\dfrac{12}{25}$. (3分)

(2)易知随机变量 X 的所有可能的取值为1,2,3,4,5,

由(1)知,$P(X=3)=\dfrac{12}{25}$,

又 $P(X=1)=\dfrac{C_5^1}{5^5}=\dfrac{1}{625}$,

$P(X=2)=\dfrac{C_5^2\cdot C_2^1\cdot(C_5^1+C_5^2)}{5^5}=\dfrac{12}{125}$,

$P(X=4)=\dfrac{C_5^4\cdot C_4^1\cdot C_5^2\cdot A_3^3}{5^5}=\dfrac{48}{125}$,

$P(X=5)=\dfrac{A_5^5}{5^5}=\dfrac{24}{625}$, (8分)

则随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{625}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{24}{625}$

所以随机变量 X 的数学期望 $E(X)=1\times\dfrac{1}{625}+2\times\dfrac{12}{125}+3\times\dfrac{12}{25}+4\times\dfrac{48}{125}+5\times\dfrac{24}{625}=\dfrac{2\ 101}{625}$. (10分)

23.【命题意图】 本题考查二项式定理、二项展开式的系数、赋值法的应用、复合函数求导、不等式恒成立问题的求解,考查考生灵活运用数学知识分析问题、解决问题的能力以及运算求解能力.

【解题思路】 对于(1),在已知等式中令 $x=0$,将问题转化为等比数列求和即可;对于(2)中的①,将 $p=1$ 代入后利用复合函数求导的知识对等式两边求导,再对 x 赋值即可,对于②,关键在于求 b_n 及 c_n,对于 b_n,可利用赋值法求得,对于 c_n,需逆用二项式定理进行求和,最后根据不等式恒成立,利用分离参数法求得参数的取值范围.

解:(1)在 $\sum\limits_{k=1}^{2n}(p+x)^k=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$ 中,

令 $x=0$,得 $a_0=p+p^2+\cdots+p^{2n-1}+p^{2n}=\begin{cases}2n,p=1,\\\dfrac{p(1-p^{2n})}{1-p},p\neq1.\end{cases}$ (2分)

(2)①当 $p=1$ 时,

$\sum\limits_{k=1}^{2n}(1+x)^k=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$,

两边对 x 求导得 $1+2(1+x)+3(1+x)^2+\cdots+2n(1+x)^{2n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+2na_{2n}x^{2n-1}$,

令 $x=-1$,得 $a_1-2a_2+3a_3-4a_4+\cdots+(2n-1)a_{2n-1}-2na_{2n}=1$. (5分)

②在 $\sum\limits_{k=1}^{2n}(1+x)^k=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$ 中,

令 $x=1$,则 $\sum\limits_{i=0}^{2n}a_i=2+2^2+2^3+\cdots+2^{2n}=\dfrac{2(1-4^n)}{-1}=2\times4^n-2$.

令 $x=-1$,则 $\sum\limits_{i=0}^{2n}[(-1)^ia_i]=0$,

所以 $b_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2i-1}=\dfrac{1}{2}(2\times4^n-2)=4^n-1$. (7分)

根据已知条件可知,$c_n=-4C_n^1+4^2C_n^2-4^3C_n^3+\cdots+(-1)^n4^nC_n^n=(1-4)^n-1=(-3)^n-1$,

将 $b_n=4^n-1$,$c_n=(-3)^n-1$ 代入不等式 $t(c_n+1)\leqslant3b_n$,

得 $t\times(-3)^n\leqslant3(4^n-1)$,

当 n 为偶数时,$t\leqslant3[(\dfrac{4}{3})^n-(\dfrac{1}{3})^n]$,所以 $t\leqslant3[(\dfrac{4}{3})^2-(\dfrac{1}{3})^2]=5$;

当 n 为奇数时,$t\geqslant-3[(\dfrac{4}{3})^n-(\dfrac{1}{3})^n]$,所以 $t\geqslant-3[(\dfrac{4}{3})^1-(\dfrac{1}{3})^1]=-3$. (9分)

综上所述,实数 t 的取值范围是 $[-3,5]$. (10分)