

## 2021 年高考数学核心猜题卷新高考版

【满分：150 分】

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 1 \leq 0, x \in \mathbf{Z}\}$ ,  $B = \{y \mid y = 2x, x \in A\}$ , 则  $A \cup B = ( )$

- A.  $\{-2, -1, 1, 2\}$       B.  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$       C.  $\{-1, 1\}$       D.  $\{0\}$

2. 若复数  $z$  满足  $(1-i) \cdot z = i$ , 则  $z$  的虚部为( )

- A.  $\frac{1}{2}i$       B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $-\frac{1}{2}i$       D.  $\frac{1}{2}$

3. 若  $a > 0, b > 0$ , 则“ $a + b \leq 4$ ”是“ $ab \leq 4$ ”的( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件      C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

4. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_1 = 1, S_{n+1} = 2S_n + 1$ , 则  $S_7 = ( )$

- A. 63      B. 127      C. 128      D. 256

5. 已知正方形  $ABCD$  内接于半径为 1 的圆  $O$ ,  $P$  是圆  $O$  上的一点 (异于  $A, B, C, D$ ), 则

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}$  的值为( )

- A. 2      B. -2      C. 4      D. -4

6. 在平面直角坐标系中, 已知角  $\frac{\pi}{3}$  的顶点在原点, 始边与  $x$  轴的非负半轴重合, 终边顺时针旋转角

$\alpha$  后过点  $P(1 - \sqrt{2})$ , 则将角  $2\alpha$  的终边逆时针旋转  $\frac{\pi}{3}$  后所得角的余弦值等于( )

- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $-\frac{2}{3}$       C.  $\frac{1}{3}$       D.  $-\frac{1}{3}$

7. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$ , 点  $A, B$  在抛物线上, 且直线  $AB$  过点  $D\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ ,  $F$  为  $C$  的焦点,

若  $|FA| = 2|FB| = 6$ , 则抛物线  $C$  的标准方程为( )

- A.  $y^2 = 4x$       B.  $y^2 = 2x$       C.  $y^2 = 8x$       D.  $y^2 = 6x$

8. 已知  $a \in \mathbf{R}$ ,  $(ax^2 - x - a + 1)\ln x \leq 0$  在  $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$  上恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为( )

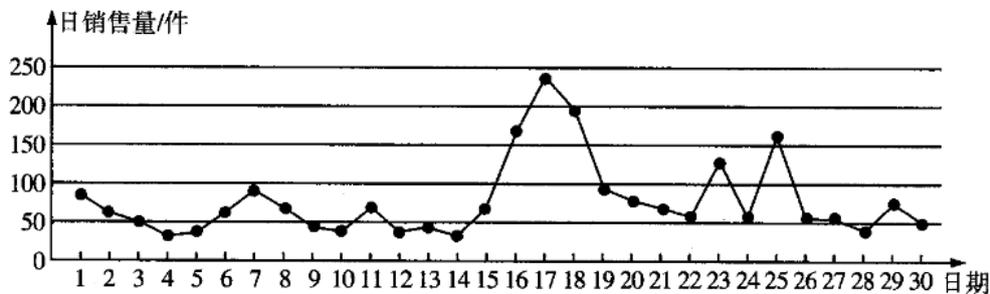
- A.  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$       B.  $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$       C.  $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$       D.  $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9. 已知正实数  $a, b$  满足  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ , 则下列不等式恒成立的是( )

- A.  $a + 4b \geq 9$       B.  $ab \geq 4$       C.  $a^2 + b^2 \leq 8$       D.  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{2}$

10. 某医疗器械公司统计了 2020 年 11 月份 A 品牌器械的日销售情况, 并绘制成如下统计图, 则下列说法正确的是 ( )



- A. 2020 年 11 月 17 日该品牌器械的销售量最大  
 B. 从销售数据看, 前半月日销售量的极差小于后半月日销售量的极差  
 C. 从销售数据看, 前半月日销售量的方差大于后半月日销售量的方差  
 D. 从销售数据看, 前半月的销售业绩高于后半月的销售业绩
11. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2, 点  $E, F$  分别是棱  $AB, A_1B_1$  的中点, 点  $P$  在四边形  $ABCD$  内 (包括边界) 运动, 则下列说法正确的是 ( )

- A. 若  $P$  是线段  $BC$  的中点, 则平面  $AB_1P \perp$  平面  $DEF$   
 B. 若  $P$  在线段  $AC$  上, 则  $D_1P$  与  $A_1C_1$  所成角的取值范围为  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$   
 C. 若  $PD_1 \parallel$  平面  $A_1C_1E$ , 则点  $P$  的轨迹的长度为  $\sqrt{2}$   
 D. 若  $PF \parallel$  平面  $B_1CD_1$ , 则线段  $PF$  长度的最小值为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

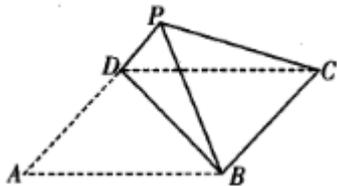
12. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足对任意的  $x, y \in \mathbf{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$ , 且当  $x > 0$  时,  $f(x) > 1$ , 则 ( )

- A.  $f(0) = 1$   
 B. 对任意的  $x \in \mathbf{R}, f(x) > 0$   
 C.  $f(x)$  是减函数  
 D. 若  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ , 且不等式  $f\left(\frac{x \ln y - x \ln x - ay}{x}\right) \leq 4$  恒成立, 则  $a$  的最小值是  $\frac{1}{e^2}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \tan\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{7}$ , 则  $\tan \alpha =$  \_\_\_\_\_.
14. 已知二项式  $\left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^n$  的展开式中, 所有项的系数之和为 64, 则该展开式中的常数项是 \_\_\_\_\_.

15.如图,在菱形  $ABCD$  中,  $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ,沿  $BD$  将  $\triangle ABD$  折起到  $\triangle PBD$  的位置,得到三棱锥  $P-BCD$ ,若三棱锥  $P-BCD$  的体积最大时  $PC = \sqrt{6}$ ,则此时三棱锥  $P-BCD$  的外接球的表面积为\_\_\_\_\_.



16.已知不等式  $a \ln x - \frac{1}{x} + e^{\frac{1}{x}} \geq x^a$  对任意  $x \in (0,1)$  恒成立,则实数  $a$  的最小值为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

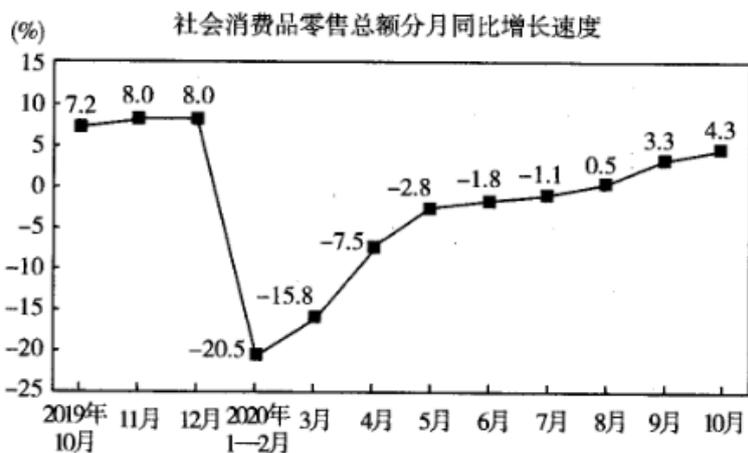
17. (10 分) 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $2 \cos A = \frac{a}{b \cos C + c \cos B}$ .

- (1) 求角  $A$  的大小;
- (2) 若  $a = \sqrt{3}$ , 求  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  的取值范围.

18. (12 分) 已知正项等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_2 \cdot a_5 = a_7, a_8 = 256$ , 正项数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $2S_n = b_n^2 + b_n - 2$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的通项公式;
- (2) 若  $c_n = \frac{2\left(S_n - \frac{3}{2}n\right) \cdot a_{n+1}}{b_n - 1}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $M_n$ .

19. (12 分) 社会消费品零售总额是反映经济景气程度的重要指标,如图为 2020 年 11 月国家统计局发布的社会消费品零售总额分月同比增长速度折线图.



(1) 设 2020 年 6 月至 10 月的月份代码为  $x$ , 且  $x$  的值依次为 1, 2, 3, 4, 5, 分月同比增速为  $y\%$ , 由折线图可以看出, 可用线性回归模型拟合  $y$  与  $x$  的关系, 求  $y$  关于  $x$  的回归方程.

(2)用(1)中的线性回归方程预测 2020 年 11 月我国社会消费品零售总额的同比增速,并与实际增速进行比较,若误差不超过 10%,则称"预测理想",否则称"预测不理想".已知国家统计局公布 2020 年 11 月我国社会消费品零售总额的同比增速为 5%,试判断对 2020 年 11 月我国社会消费品零售总额同比增速的预测是否理想.

(3)某电视台财经频道准备从 2020 年 3 月至 10 月这 8 个月中随机选取 3 个月,详细分析社会消费品零售总额按行业细分的数据,记选取的 3 个月中社会消费品零售总额同比增速为负数的月份个数为  $X$ ,求  $X$  的分布列与数学期望.

参考数据:  $\sum_{i=1}^5 y_i = 5.2, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 32.2$ .

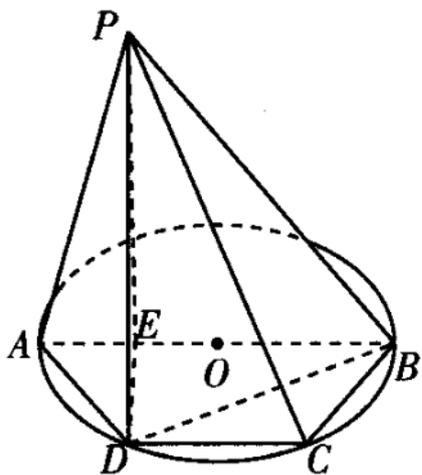
参考公式:线性回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  中斜率和截距的最小二乘估计公式分别

$$\text{为: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

20. (12 分) 如图,四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  内接于半径为 2 的圆  $O$ ,  $AB$  为圆  $O$  的直径,  $AB \parallel CD$ ,  $2DC = AB$ ,  $E$  为  $AB$  上一点,且  $PE \perp$  平面  $ABCD$ ,  $ED = \sqrt{3}$ .

(1)求证:  $PA \perp DE$ ;

(2)若直线  $PB$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $\frac{\pi}{4}$ ,求二面角  $C-PB-D$  的余弦值.



21. (12 分) 已知函数  $f(x) = x(\ln x - ax - 1), a \in \mathbf{R}$ .

(1) 设函数  $g(x) = f'(x)$  ( $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数), 求  $g(x)$  的零点个数;

(2) 若  $f(x)$  的最大值是 0, 求实数  $a$  的值.

22. (12 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $M\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ , 且分别以椭圆的长轴和短轴为直径的圆的面积的比值为 4.

(1)求椭圆  $C$  的标准方程;

(2)若直线  $y = kx(k > 0)$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 过点  $A$  作直线  $AB$  的垂线, 交椭圆  $C$  于点  $D$ , 连接  $BD$ , 与  $x, y$  轴分别交于点  $P, Q$ , 过原点  $O$  作直线  $BD$  的垂线, 垂足为  $R$ , 求  $|OR| \cdot |PQ|$  的最大值.



# 正确教育版权声明



北京正确教育投资有限公司（以下简称为正确教育）为尊重和保护知识产权，依法维护参编作者和旗下网站的合法权益，特发表维护著作权声明如下：

1.在正确教育原创资料正文标题的下方（或课件在尾页）签署有参编作者授权声明，“本人声明：本文属本人原创作品，本文著作权授予‘北京正确教育投资有限公司’独家所有，本人拥有署名权。”

2.此类原创资料，正确教育拥有该原创资料的独家著作权，未经正确教育明确书面授权，编者不得许可第三方在网络上或者图书行业等商业活动中使用本人已上传至正确教育的原创资料。

3.任何商业公司或其他网站未经正确教育的授权许可，不得转载、摘编或以其他方式使用上述作品。

4.如发现某单位侵权使用正确教育的原创资料，欢迎用户向我们举报侵权单位，经正确教育总部确认属实后，给予举报用户奖励。同时，资料编者有义务协助公司共同维护知识产权。

5.对于侵犯相关编者及正确教育合法权益的公司、网站和个人，正确教育均保留追究法律责任的权利。

6.本声明未涉及的问题请参见国家有关法律法规，当本声明与国家有关法律法规冲突时，以国家法律法规为准。

7.本网站相关声明版权及其修改权、更新权和最终解释权均属本公司所有。

特此声明。

北京正确教育投资有限公司

二〇二〇年四月十三日

