



所以当 $x_0 > 1 + \frac{1}{2a}$ 时, $h(x_0) < 0$.

即 $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{2a}, +\infty\right), g(x_0) < 0$.

6 反思升华,道法自然

通过师生对本题的探索与思维碰撞,越发觉得这是一道难得的锻炼学生思维能力的好题,尤其是探索标准答案的产生原理和思路的过程中,逐渐产生的对答案的理解和认同,这是思维的跨越,同时学生对于导数中的找点问题有了更为深入的认识,也总结了解决问题的常见思路,通常考虑三个方向:

1. 特殊点代入,如 $0, 1, 2, e, \frac{1}{e}, a, \frac{1}{a}, a^2, \dots$

2. 指数与对数运算关系找点:利用两个恒等式 $\log_a a^x = x$ 及 $a^{\log_a x} = x$ 转化.

3. 对函数放缩找点:通常借助 $e^x > x > \ln x (x > 0), e^x > x + 1 (x \neq 0)$ (见人教 A 版教科书选修 2-2, P32, 复习参考题 B 组 1) 等常见恒不等式进行放缩或分组放缩.

追求本质、自然、简单的解题方法,不仅需要勤思多练,更要注重对知识与思想方法的溯本追源,研

读课本,积累数学思维活动经验,唯有如此才能结出累累硕果.“题在书外,根在书中”^[3]是不变的命题理念,我们的教学一定要注重教科书的作用,别让自己的教学与学生的学习成为无本之木、无源之水.

参考文献

- [1] 王芝平,李亚斌.函数零点看端详 异号连续细思量[J]. 数学通报,2019,58(06).
- [2] 王芝平,王坤. 数学解题勿忘自然、简单的原则[J]. 数学通报,2014,53(01).
- [3] 李振雷,王芝平,王坤. 题在书外 根在书中——2006 年高考北京卷数学试题选析[J]. 高中数理化,2006(05).

作者简介 王桢宇(1978—),男,河北承德人,中学高级教师,东城区优秀教师,东城区兼职教研员,东城区骨干教师,获东城区教师基本功大赛一等奖、东城区说课比赛一等奖,发表学术文章十余篇,主要从事中学数学教学研究.

王芝平(1962—),男,山东德州人,中学高级教师,北京市特级教师,北京市首届名师,教学成果获北京市人民政府基础教育一等奖,人教社高中数学 A 版教科书与教师教学参考用书核心作者,主要从事中学数学教学研究.

当导数遭遇三角

华中师大一附中

430223

曹 轩

华中师大一附中

430223

龚 芮

去年全国卷 I 出现三角函数为背景的导数压轴题,今年各大模拟试题也出现了很多导数与三角函数的交汇类型,并且题型相对比较固定,主要侧重三个方面的问题:一是以三角为背景的恒成立问题,二是三角背景的导数零点问题,三是以三角为背景的不等式证明问题.由于三角型函数的周期性,对称性,有界性等方面的性质,无法多次求导使得三角函数消失,学生往往很难处理此类问题.

类型 1 三角与恒成立

导数与三角的恒成立问题,往往考查的是“端点”效应,当然这里的“端点”可能是区间端点也有可能是整个函数对称点处;并且我们在书写过程中充分性的表述可能会用到三角型函数的有界性,必要性的证明中需要利用三角函数“端点”处的局部单调性(明确的)去寻找恒成立的矛盾区间或矛盾值.

例 1 (2020 年湖北高三五月调研理数 11) 已知 $f(x) = a(e^x - e^{-x}) - \sin \pi x (a > 0)$ 存在唯一零点,求实数 a 的取值范围.

分析 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(x)$ 的唯一零点是 0,又因为 $a > 0$ 且三角函数的有界性,所以此题本质上是解决以下恒成立问题: $f(x) > 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立求实数 a 的取值范围.典型的端点效应,解答过程如下:

解析 $f'(x) = a(e^x + e^{-x}) - \pi \cos \pi x, x \in (0, +\infty), f'(0) = 2a - \pi$.

(1) 当 $a \geq \frac{\pi}{2}$ 时, $a(e^x + e^{-x}) \geq 2a \geq \pi$, $\pi \cos \pi x \leq \pi$, 所以 $f'(x) > 0, x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 因此 $f(x) > f(0) = 0, x \in (0, +\infty)$ 恒成立;

(2) 当 $0 < a < \frac{\pi}{2}, x \in (0, \pi)$ 时, $f'(x)$ 是单调



递增函数,且 $f'(0) < 0, f'(\pi) > 0$.由零点存在定理,存在 $x_0 \in (0, \pi)$ 满足 $f'(x_0) = 0$,因此 $x \in (0, x_0), f'(x) < 0$,此时 $f(x)$ 单调递减, $f(x_0) < f(0) = 0$,与已知矛盾. 综上:实数 a 的取值范围为 $a \geq \frac{\pi}{2}$.

类型 2 三角与零点

这类问题需要我们多次求导明确单调性,明确单调性的过程中我们需要“抓小放大”,抓小就是尽量将研究的范围限定到三角函数的四分之一周期内,其它范围利用有界性整体考虑.

例 2 (2019 年新课标 I 理数) 已知函数 $f(x) = \sin x - \ln(1+x), f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.证明:

(1) $f'(x)$ 在区间 $\left[-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 内存在唯一极大值点;

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

分析 在明确单调性的前提下,三角类型的找点问题往往利用有界性或者特殊角的函数值,第二问中 $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$,下面利用解不等式的方法找 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内大于 0 的点; $\sin x \geq -1 > \ln(x+1)$,同理通过解不等式 $\sin x \geq -1 > \ln(x+1), \sin x \leq 1 < \ln(x+1)$,同时考虑第一问的区间,找到符合点 $\frac{\pi}{2}, \pi$,这个是我们分析问题的突破口.

解析 (1) 设 $g(x) = f'(x)$,则 $g(x) = \cos x - \frac{1}{1+x}, g'(x) = -\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}$.

当 $x \in \left[-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x)$ 单调递减,而 $g'(0) > 0, g'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$,可得 $g'(x)$ 在 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一零点设为 α .则当 $x \in (-1, \alpha)$ 时, $g'(x) > 0$;当 $x \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-1, \alpha)$ 单调递增,在 $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减,故 $g(x)$ 在 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 内存在唯一极大值点,即 $f'(x)$ 在 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 内存在唯一极大值点.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

(i) 当 $x \in (-1, 0]$ 时,由(1)知, $f'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增,而 $f'(0) = 0$,所以当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$,故 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减,又

万方数据

$f(0) = 0$,从而 $x = 0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 的唯一零点.

(ii) 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时,由(1)知, $f'(x)$ 在 $(0, \alpha)$ 上单调递增,在 $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,而 $f'(0) = 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$,所以存在 $\beta \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$,使得 $f'(\beta) = 0$,且当 $x \in (0, \beta)$ 时, $f'(x) > 0$;当 $x \in \left(\beta, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$.故 $f(x)$ 在 $(0, \beta)$ 上单调递增,在 $\left(\beta, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.又 $f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) > 0$,所以当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) > 0$.从而 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 没有零点.

(iii) 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时, $f'(x) < 0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减.而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, f(\pi) < 0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内有唯一零点.

(iv) 当 $x \in (\pi, +\infty)$ 时, $\ln(x+1) > 1$,所以 $f(x) < 0$,从而 $f(x)$ 在 $(\pi, +\infty)$ 内没有零点.

综上, $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

类型 3 三角与不等式的证明

这种问题的解决部分人着重自己构造新的函数放缩,这种做法与出题人的意图违背,我觉得可以从以下两种方法出发:一是大家积累常见的函数组合(例如 $x \ln x, \frac{e^x}{x}, \ln x + x, \frac{\sin x}{x}$ 等等),把常见的组合函数放在一起,对于三角类型的函数利用有界性进行放缩即可;二是由于三角函数的周期性和有界性,对于不等式的证明我们可以分范围分段考虑.具体操作过程如下:

例 3 (2020 年湖北高三五月调研理数 21) 已知 $f(x) = 2\pi^2 x^2 + \cos ax - 1, a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立,求 a 的最大值 a_0 ;

(2) 若 $g(x) = \ln(2\pi^2 x + 1 - \pi^2) + \frac{\pi^2}{2}$,取(1)中的 a_0 ,当 $a = a_0$ 时,证明: $g(x) - f(x) \leq 2$.

解析 第一问参考本文的类型 1 例 1 解答, $a_0 = 2\pi$,限于篇幅省略过程.

由(1)可知 $f(x) = 2\pi^2 x^2 + \cos 2\pi x - 1$,要证 $\ln(2\pi^2 x + 1 - \pi^2) + \frac{\pi^2}{2} - (2\pi^2 x^2 + \cos 2\pi x - 1) \leq$


$$2, \text{也就是证明: } \ln(2\pi^2x + 1 - \pi^2) - 2\pi^2x^2 \leq 1 - \frac{\pi^2}{2} + \cos 2\pi x. \quad (1)$$

设 $\varphi(x) = \ln(2\pi^2x + 1 - \pi^2) - 2\pi^2x^2, x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi^2}, +\infty\right)$, 则 $\varphi'(x) = \frac{-(4\pi^2x + 2)(2\pi^2x - \pi^2)}{2\pi^2x + 1 - \pi^2}$, 因此 $\varphi(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi^2}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减.

$$\varphi(x)_{\max} = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{2}, \textcircled{1} \text{ 式右侧 } 1 - \frac{\pi^2}{2} + \cos 2\pi x \geq 1 - \frac{\pi^2}{2} + (-1) = -\frac{\pi^2}{2}, \text{原不等式得证.}$$

例4 (2020年陕西模拟) 已知函数 $f(x) = (x - a) \ln x (a \in \mathbf{R})$, 它的导函数为 $f'(x)$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f'(x)$ 的零点;
(2) 当 $a = 0$ 时, 证明: $f(x) < e^x + \sin x - 1$.

解析 (2)(第一问限于篇幅,此处省略).

法1 要证不等式 $x \ln x < e^x + \sin x - 1$, 也就是
证明: $\ln x - \frac{e^x - 1}{x} < \frac{\sin x}{x}$.

令 $h(x) = \ln x - \frac{e^x - 1}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{(1-x)(e^x - 1)}{x^2}$, 因此 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递增, 在 $(1,$

$+\infty)$ 上递减, $h(x)_{\max} = 1 - e$.

当 $x \in (0, \pi]$ 时, $\frac{\sin x}{x} \geq 0 > 1 - e; x \in (\pi, +\infty)$ 时, $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{-1}{x} > -\frac{1}{\pi} > 1 - e$, 所以 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\frac{\sin x}{x} > \left(\ln x - \frac{e^x - 1}{x} \right)_{\max}$, 原不等式得证.

法2 分段考虑

(1) $x \in (0, 1]$ 时, $x \ln x \leq 0, e^x + \sin x - 1 \geq \sin x$
 > 0 , 不等式成立;

(2) $x \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi(x) = e^x + \sin x - 1 - x \ln x$, $\varphi'(x) = e^x + \cos x - \ln x - 1$, 令 $h(x) = e^x + \cos x - \ln x - 1$, $h'(x) = e^x - \sin x - \frac{1}{x} > e - 1 - 1 > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x) > h(1) = e - 1 + \cos 1 > 0$, $x \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi(x)$ 单调递增 $\Rightarrow \varphi(x) > \varphi(1) = e + \sin 1 - 1 > 0$.

综上原不等式得证.

总之,三角函数正逐渐走进导数解答题,并由于它一些独有的性质,正逐渐受到命题老师的青睐.三角函数与其它函数在一起时,往往需要放大抓小,如果其它函数具有对称性我们就从整体的对称性考量.从辩证法的角度看,在局部小的范围内具有确定的单调性,往往需要求导多次,才能找到一个某阶导数恒大于零或小于零的情况,同时三角函数相对于其它函数在运动中相对稳定,可以借助它的有界性进行放缩处理.

当 e^x 遇上 n 次函数

——议 2020 年全国卷 I 和浙江卷的导数压轴题

江苏省无锡市市北高级中学 214045 胡蓓蓓

2020 注定是不平凡的一年,万众瞩目的高考卷精彩纷呈,不负众望,更是呈现了一场导数的饕餮盛宴,令广大师生回味无穷.

近年高考卷中的导数压轴题多以多项式函数(一次函数、二次函数、三次函数)、指数与对数函数的组合表达式为载体,以切线、单调性、极值、最值、零点、恒成立、不等式证明等问题进行设问,综合性强,难度较大,因此在复习中要强化研究函数与导数问题的一般思路和方法,淡化解题技巧,导数作为兼

具代数运算和几何性质的重要概念,是研究函数性质的有力工具,对学生的数学抽象、逻辑推理与运算求解能力都提出了很高要求.

1 当 e^x 遇上一次函数

$e^x \geq x + 1$, 是课本一道习题, $y = x + 1$ 是 $y = e^x$ 在 $x = 0$ 处的切线, 数形结合, 指数函数图象恒在切线的上方或在切点处相切. 同理 $e^x \geq ex$. 许多压轴试题的背景都与这两个不等式有关, 通过切线放缩, 化直为曲, 以直代曲.