导数与函数的零点

考点聚焦突破 分类讲练，以例求法

考点一　判断零点的个数

【例 1】 (2020 潍坊检测)已知函数 $f(x)=\ln x-x^2+ax$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)证明 $\ln x\leqslant x-1$；

(2)若 $a\geqslant 1$，讨论函数 $f(x)$的零点个数.

(1)证明　令 $g(x)=\ln x-x+1(x>0)$，则 $g(1)=0$，

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$,

可得 $x\in(0，1)$时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$单调递增；

$x\in(1，+\infty)$时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$单调递减.

$\therefore$当 $x=1$ 时，函数 $g(x)$取得极大值也是最大值，

$\therefore g(x)\leqslant g(1)=0$，即 $\ln x\leqslant x-1$.

(2)$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2x+a=\dfrac{-2x^2+ax+1}{x}$，$x>0$.

令 $-2x_0^2+ax_0+1=0$，解得 $x_0=\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}$(负值舍去)，

在$(0，x_0)$上，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$单调递增；

在$(x_0，+\infty)$上，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$单调递减.

$\therefore f(x)_{\max}=f(x_0)$.

当 $a=1$ 时，$x_0=1$，$f(x)_{\max}=f(1)=0$，此时函数 $f(x)$只有一个零点 $x=1$.

当 $a>1$ 时，$f(1)=a-1>0$，

$f\left(\dfrac{1}{2a}\right)=\ln \dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2a}-1-\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{2}$

$=-\left(\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}<0$,

$f(2a)=\ln 2a-2a^2<2a-1-2a^2=-2\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}<0$.

$\therefore$函数 $f(x)$在区间$\left(\dfrac{1}{2a}，1\right)$和区间$(1，2a)$上各有一个零点.

综上可得：当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$只有一个零点 $x=1$；

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$有两个零点.

规律方法 1.利用导数求函数的零点常用方法：

(1)构造函数 $g(x)$(其中 $g'(x)$易求，且 $g'(x)=0$ 可解)，利用导数研究 $g(x)$的性质，结合 $g(x)$的图象，判断函数零点的个数.

(2)利用零点存在定理，先判断函数在某区间有零点，再结合图象与性质确定函数有多少个零点.

2.根据参数确定函数零点的个数，解题的基本思想是“数形结合”，即通过研究函数的性质(单调性、极值、函数值的极限位置等)，作出函数的大致图象，然后通过函数图象得出其与 x 轴交点的个数，或者两个相关函数图象交点的个数，基本步骤是“先数后形”.

【训练 1】 (2018·全国Ⅱ卷)已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$.

(1)若 $a=3$，求 $f(x)$的单调区间；

(2)证明：$f(x)$只有一个零点.

(1)**解** 当 $a=3$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2-3x-3$，$f'(x)=x^2-6x-3$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=3-2\sqrt{3}$或 $x=3+2\sqrt{3}$.

当 $x\in(-\infty，3-2\sqrt{3})\cup(3+2\sqrt{3}，+\infty)$时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(3-2\sqrt{3}，3+2\sqrt{3})$时，$f'(x)<0$.

故 $f(x)$在$(-\infty，3-2\sqrt{3})$，$(3+2\sqrt{3}，+\infty)$单调递增，在$(3-2\sqrt{3}，3+2\sqrt{3})$单调递减.

(2)**证明** 由于 $x^2+x+1>0$，所以 $f(x)=0$ 等价于$\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a=0$.

设 $g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a$，则 $g'(x)=\frac{x^2(x^2+2x+3)}{(x^2+x+1)^2}\geqslant 0$，仅当 $x=0$ 时 $g'(x)=0$，

所以 $g(x)$在$(-\infty，+\infty)$单调递增.

故 $g(x)$至多有一个零点，从而 $f(x)$至多有一个零点.

又 $f(3a-1)=-6a^2+2a-\frac{1}{3}=-6\left(a-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}<0$，

$f(3a+1)=\frac{1}{3}>0$，故 $f(x)$有一个零点.

综上，$f(x)$只有一个零点.

考点二　根据零点个数求参数的值(范围)

【例 2】 函数 $f(x)=ax+x\ln x$ 在 $x=1$ 处取得极值.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $y=f(x)-m-1$ 在定义域内有两个不同的零点，求实数 m 的取值范围.

解　(1)函数 $f(x)=ax+x\ln x$ 的定义域为$(0，+\infty)$.

$f'(x)=a+\ln x+1$，

因为 $f'(1)=a+1=0$，解得 $a=-1$，

当 $a=-1$ 时，$f(x)=-x+x\ln x$，

$f'(x)=\ln x$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>1$；

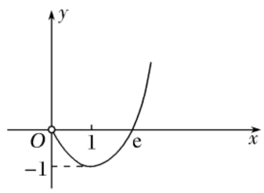
令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<1$.

所以 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值，$f(x)$的单调递增区间为$(1，+\infty)$，单调递减区间为$(0，1)$.

(2)$y=f(x)-m-1$ 在$(0，+\infty)$内有两个不同的零点，可转化为 $y=f(x)$与 $y=m+1$ 图象有两个不同的交点.

由(1)知，$f(x)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=-1$，

当 $0<x<e$ 时，$f(x)=x(-1+\ln x)<0$；当 $x>e$ 时，$f(x)>0$.



当 $x>0$ 且 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$；

当 $x\to+\infty$时，显然 $f(x)\to+\infty$.

由图象可知，$-1<m+1<0$，

即$-2<m<-1$.

所以 m 的取值范围是$(-2，-1)$.

规律方法　1.函数零点个数可转化为图象的交点个数，根据图象的几何直观求解.

2.与函数零点有关的参数范围问题，往往利用导数研究函数的单调区间和极值点，并结合特殊点判断函数的大致图象，进而求出参数的取值范围.

【训练 2】 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)求 $f(x)$的单调递减区间；

(2)已知函数 $f(x)$有两个不同的零点，求实数 a 的取值范围.

解　(1)由题意可得，$f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{ax^2-2}{x^3}(x>0)$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，

当 $a>0$ 时，$f'(x)=\frac{a\left(x+\sqrt{\frac{2}{a}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{2}{a}}\right)}{x^3}$，

由 $f'(x)\leqslant 0$，解得 $0<x\leqslant\sqrt{\frac{2}{a}}$，

∴此时函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left(0，\frac{\sqrt{2a}}{a}\right)$.

综上可得：$a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$的单调递减区间为$(0，+\infty)$，

$a>0$ 时，函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left(0，\frac{\sqrt{2a}}{a}\right)$.

(2)由(1)可得若函数 $f(x)$有两个不同的零点，则必须满足 $a>0$，

且 $f\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\right)=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\ln\frac{2}{a}<0$，

化为 $\ln\frac{2}{a}<-1$，解得 $a>2e$.

所以实数 a 的取值范围是$(2e，+\infty)$.

考点三　函数零点的综合问题

【例 3】 设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$的导函数 $f'(x)$零点的个数；

(2)证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

(1)**解**　$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}(x>0)$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f'(x)$没有零点；

当 $a>0$ 时，因为 $y=e^{2x}$单调递增，$y=-\frac{a}{x}$单调递增，

所以 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增.

又 $f'(a)>0$，当 b 满足 $0<b<\frac{a}{4}$，且 $b<\frac{1}{2}\ln 2$ 时，$f'(b)<0$，

故当 $a>0$ 时，$f'(x)$存在唯一零点.

(2)**证明**　由(1)，可设 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上的唯一零点为 x_0，

当 $x\in(0，x_0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0，+\infty)$时，$f'(x)>0$.

故 $f(x)$在$(0，x_0)$上单调递减，在$(x_0，+\infty)$上单调递增，

所以当 $x=x_0$ 时，$f(x)$取得最小值，最小值为 $f(x_0)$.

由于 $2e2x_0-\frac{a}{x_0}=0$，

所以 $f(x_0)=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

故当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

规律方法 1.在(1)中，当 $a>0$ 时，$f'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，从而 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上至多有一个零点，问题的关键是找到 b，使 $f'(b)<0$.

2.由(1)知，函数 $f'(x)$存在唯一零点 x_0，则 $f(x_0)$为函数的最小值，从而把问题转化为证明 $f(x_0)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

【训练 3】 (2019·全国Ⅰ卷)已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$f'(x)$为 $f(x)$的导数.

(1)证明：$f'(x)$在区间$(0，\pi)$存在唯一零点；

(2)若 $x\in[0，\pi]$时，$f(x)\geqslant ax$，求 a 的取值范围.

(1)**证明** 设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x+x\sin x-1$，

$g'(x)=x\cos x$.

当 $x\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)>0$；

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2}，\pi\right)$时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{\pi}{2}，\pi\right)$上单调递减.

又 $g(0)=0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$g(\pi)=-2$，

故 $g(x)$在$(0，\pi)$存在唯一零点.

所以 $f'(x)$在区间$(0，\pi)$存在唯一零点.

(2)**解** 由题设知 $f(\pi)\geqslant a\pi$，$f(\pi)=0$，可得 $a\leqslant 0$.

由(1)知，$f'(x)$在$(0，\pi)$只有一个零点，设为 x_0，

当 $x\in(0，x_0)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in(x_0，\pi)$时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$在$(0，x_0)$上单调递增，在$(x_0，\pi)$上单调递减.

又 $f(0)=0$，$f(\pi)=0$，所以当 $x\in[0，\pi]$时，$f(x)\geqslant 0$.

又当 $a\leqslant 0$，$x\in[0，\pi]$时，$ax\leqslant 0$，故 $f(x)\geqslant ax$.

因此，a 的取值范围是$(-\infty，0]$.

A级　基础巩固

一、选择题

1.(2020青岛二中训练)函数 $f(x)=\ln x-\sqrt{x}$的零点个数是(　　)

A.3　　B.2　　C.1　　D.0

解析　$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$，定义域$(0,+\infty)$.

当 $0<x<4$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>4$ 时，$f'(x)<0$.

∴$f(x)$在$(0,4)$上递增，在$(4,+\infty)$上递减，

则 $f(x)_{max}=f(4)=\ln 4-2=\ln\frac{4}{e^2}<0$.

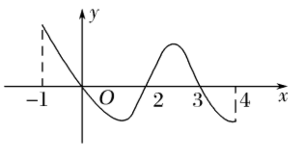
∴$f(x)<0$ 恒成立，故 $f(x)$没有零点.

答案　D

2.已知函数 $f(x)$的定义域为$[-1,4]$，部分对应值如下表：

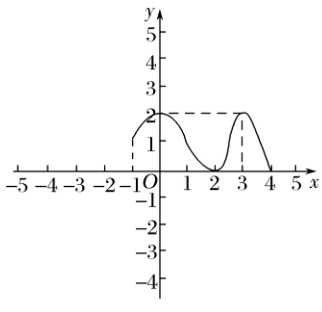
x	-1	0	2	3	4
$f(x)$	1	2	0	2	0

$f(x)$的导函数 $y=f'(x)$的图象如图所示.当 $1<a<2$ 时，函数 $y=f(x)-a$ 的零点的个数为(　　)



A.1　　B.2　　C.3　　D.4

解析　根据导函数图象，知2是函数的极小值点，函数 $y=f(x)$的大致图象如图所示.



由于 $f(0)=f(3)=2$，$1<a<2$，所以 $y=f(x)-a$ 的零点个数为4.

答案　D

3.(2020海安检测)设函数 $f(x)=ae^x-2\sin x$，$x\in[0,\pi]$有且仅有一个零点，则实数 a 的值为(　　)

A.$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$　　B.$\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$　　C.$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}}$　　D.$\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$

解析　依题意，$x\in[0, \pi]$时，$ae^x-2\sin x=0$有且仅有一解.

则$a=\dfrac{2\sin x}{e^x}$，$x\in[0, \pi]$有且仅有一解.

设$g(x)=\dfrac{2\sin x}{e^x}$，$x\in[0, \pi]$.

故直线 $y=a$ 与 $g(x)=\dfrac{2\sin x}{e^x}$，$x\in[0, \pi]$的图象只有一个交点，则 $g'(x)=$

$\dfrac{2\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{e^x}$，

当$0\leqslant x<\dfrac{\pi}{4}$时，$g'(x)>0$，当$\dfrac{\pi}{4}<x\leqslant\pi$时，$g'(x)<0$，

即$g(x)$在$\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$为增函数，在$\left(\dfrac{\pi}{4}, \pi\right]$为减函数，

又$g(0)=0$，$g(\pi)=0$，$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，

则可得实数a的值为$\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$.

答案　B

二、填空题

4.若函数$f(x)=\dfrac{ax-a}{e^x}+1(a<0)$没有零点，则实数$a$的取值范围为________.

解析　$f'(x)=\dfrac{ae^x-(ax-a)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{-a(x-2)}{e^x}(a<0)$.

当$x<2$时，$f'(x)<0$；当$x>2$时，$f'(x)>0$，

∴当$x=2$时，$f(x)$有极小值$f(2)=\dfrac{a}{e^2}+1$.

若使函数$f(x)$没有零点，当且仅当$f(2)=\dfrac{a}{e^2}+1>0$，

解之得$a>-e^2$，因此$-e^2<a<0$.

答案　$(-e^2, 0)$

5.(2020湖南长郡中学检测)已知函数$f(x)=x^3-x^2+ax-a$存在极值点x_0，且$f(x_1)=f(x_0)$，其中$x_1\neq x_0$，则$x_1+2x_0=$________.

解析　由$f(x)=x^3-x^2+ax-a$，得$f'(x)=3x^2-2x+a$.

∵x_0为$f(x)$的极值点，知$3x_0^2-2x_0+a=0$.①

因为 $f(x_1)=f(x_0)$，其中 $x_1\neq x_0$，

所以 $x_1^3-x_1^2+ax_1-a=x_0^3-x_0^2+ax_0-a$，

化为 $x_1^2+x_1x_0+x_0^2-(x_1+x_0)+a=0$，

把 $a=-3x_0^2+2x_0$ 代入上述方程可得

$x_1^2+x_1x_0+x_0^2-(x_1+x_0)-3x_0^2+2x_0=0$，

化为 $x_1^2+x_1x_0-2x_0^2+x_0-x_1=0$，

即$(x_1-x_0)(x_1+2x_0-1)=0$，

$\because x_1-x_0\neq 0$，$\therefore x_1+2x_0=1$.

答案　1

三、解答题

6.已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3-\frac{3}{2}x^2+(a+1)x+5$ 的一个极值点.

(1)求函数 $f(x)$的解析式；

(2)若曲线 $y=f(x)$与直线 $y=2x+m$ 有三个交点，求实数 m 的取值范围.

解　(1)$f'(x)=ax^2-3x+a+1$，由 $f'(1)=0$，得 $a=1$，

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+5$.

(2)曲线 $y=f(x)$与直线 $y=2x+m$ 有三个交点，

则 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+5-2x-m=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5-m$ 有三个零点.

由 $g'(x)=x^2-3x=0$，得 $x=0$ 或 $x=3$.

由 $g'(x)>0$，得 $x<0$ 或 $x>3$；由 $g'(x)<0$，得 $0<x<3$.

$\therefore$函数 $g(x)$在$(-\infty，0)$和$(3，+\infty)$上为增函数，在$(0，3)$上为减函数.

要使 $g(x)$有三个零点，只需$\begin{cases}g(0)>0,\\ g(3)<0,\end{cases}$解得$\frac{1}{2}<m<5$.

故实数 m 的取值范围为$\left(\frac{1}{2}，5\right)$.

7.已知函数 $f(x)=e^x-1$，$g(x)=\sqrt{x}+x$，其中 e 是自然对数的底数，e＝2.718 28….

(1)证明：函数 $h(x)=f(x)-g(x)$在区间$(1，2)$上有零点；

(2)求方程 $f(x)=g(x)$的根的个数，并说明理由.

(1)**证明**　易知 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1-\sqrt{x}-x$，

所以 $h(1)=e-3<0$，$h(2)=e^2-3-\sqrt{2}>0$，

所以 $h(1)h(2)<0$，

所以函数 $h(x)$在区间(1，2)上有零点.

(2)解　由(1)可知 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1-\sqrt{x}-x$.

由 $g(x)=\sqrt{x}+x$ 知 $x\in[0,+\infty)$，

而 $h(0)=0$，则 $x=0$ 为 $h(x)$的一个零点.

又 $h(x)$在(1，2)内有零点，

因此 $h(x)$在$[0,+\infty)$上至少有两个零点.

$h'(x)=e^x-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1$，记 $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1$，

则 $\varphi'(x)=e^x+\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$.

当 $x\in(0,+\infty)$时，$\varphi'(x)>0$，

因此 $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

易知 $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$内只有一个零点，

则 $h(x)$在$[0,+\infty)$上有且只有两个零点，

所以方程 $f(x)=g(x)$的根的个数为 2.

B 级　能力提升

8.(2020 河南名校联盟调研)已知函数 $f(x)=e^x+(a-e)x-ax^2$.

(1)当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$的极值；

(2)若函数 $f(x)$在区间(0，1)内存在零点，求实数 a 的取值范围.

解　(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=e^x-ex$，

则 $f'(x)=e^x-e$，$f'(1)=0$，

当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值，且极小值为 $f(1)=0$，无极大值.

(2)由题意得 $f'(x)=e^x-2ax+a-e$，

设 $g(x)=e^x-2ax+a-e$，则 $g'(x)=e^x-2a$.

若 $a=0$，则 $f(x)$的最大值 $f(1)=0$，故由(1)得 $f(x)$在区间(0，1)内没有零点.

若 $a<0$，则 $g'(x)=e^x-2a>0$，故函数 $g(x)$在区间(0，1)内单调递增.

又 $g(0)=1+a-\mathrm{e}<0$，$g(1)=-a>0$，所以存在 $x_0\in(0,1)$，使 $g(x_0)=0$.

故当 $x\in(0,x_0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x\in(x_0,1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

因为 $f(0)=1$，$f(1)=0$，所以当 $a<0$ 时，$f(x)$在区间(0，1)内存在零点.

若 $a>0$，由(1)得当 $x\in(0,1)$时，$\mathrm{e}^x>\mathrm{e}x$.

则 $f(x)=\mathrm{e}^x+(a-\mathrm{e})x-ax^2>\mathrm{e}x+(a-\mathrm{e})x-ax^2=a(x-x^2)>0$，

此时函数 $f(x)$在区间(0，1)内没有零点.

综上，实数 a 的取值范围为$(-\infty,0)$.

9.(2019 ·天津卷)设函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)\mathrm{e}^x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $a\leqslant0$，讨论 $f(x)$的单调性；

(2)若 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

(ⅰ)证明 $f(x)$恰有两个零点；

(ⅱ)设 x_0 为 $f(x)$的极值点，x_1 为 $f(x)$的零点，且 $x_1>x_0$，证明 $3x_0-x_1>2$.

(1)**解**　由已知，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

且 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-[a\mathrm{e}^x+a(x-1)\mathrm{e}^x]=\dfrac{1-ax^2\mathrm{e}^x}{x}$.

因此当 $a\leqslant0$ 时，$1-ax^2\mathrm{e}^x>0$，从而 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增.

(2)**证明**　(ⅰ)由(1)知，$f'(x)=\dfrac{1-ax^2\mathrm{e}^x}{x}$.

令 $g(x)=1-ax^2\mathrm{e}^x$，

由 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，知 $g(x)$在$(0,+\infty)$内单调递减.

又 $g(1)=1-a\mathrm{e}>0$，

且 $g\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)=1-a\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)^2\dfrac{1}{a}=1-\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)^2<0$，

故 $g(x)=0$ 在$(0,+\infty)$内有唯一解，

从而 $f'(x)=0$ 在$(0,+\infty)$内有唯一解，

不妨设为 x_0，则 $1<x_0<\ln\dfrac{1}{a}$.

当 $x\in(0, x_0)$时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}>\frac{g(x_0)}{x}=0$，

所以 $f(x)$在$(0, x_0)$内单调递增；

当 $x\in(x_0, +\infty)$时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}<\frac{g(x_0)}{x}=0$，

所以 $f(x)$在$(x_0, +\infty)$内单调递减，

因此 x_0 是 $f(x)$的唯一极值点.

令 $h(x)=\ln x-x+1$，

则当 $x>1$ 时，$h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$，

故 $h(x)$在$(1, +\infty)$内单调递减，

从而当 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，

所以 $\ln x<x-1$，

从而 $f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)-a\left(\ln\frac{1}{a}-1\right)e^{\ln\frac{1}{a}}$

$=\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)-\ln\frac{1}{a}+1=h\left(\ln\frac{1}{a}\right)<0$.

又因为 $f(x_0)>f(1)=0$，

所以 $f(x)$在$(x_0, +\infty)$内有唯一零点.

又 $f(x)$在$(0, x_0)$内有唯一零点 1，

从而，$f(x)$在$(0, +\infty)$内恰有两个零点.

(ⅱ)由题意，$\begin{cases} f'(x_0)=0, \\ f(x_1)=0, \end{cases}$ 即$\begin{cases} ax_0^2e^{x_0}=1, \\ \ln x_1=a(x_1-1)e^{x_1}, \end{cases}$

从而 $\ln x_1=\frac{x_1-1}{x_0^2}e^{x_1-x_0}$，即 $e^{x_1-x_0}=\frac{x_0^2\ln x_1}{x_1-1}$.

因为当 $x>1$ 时，$\ln x<x-1$，

又 $x_1>x_0>1$，

故 $e^{x_1-x_0}<\frac{x_0^2(x_1-1)}{x_1-1}=x_0^2$，两边取对数，

得 $\ln e^{x_1-x_0}<\ln x_0^2$，

于是 $x_1-x_0<2\ln x_0<2(x_0-1)$，

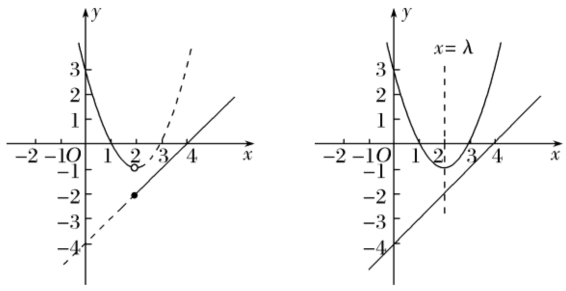
整理得 $3x_0-x_1>2$.

C 级　创新猜想

10.(**多填题**)(2018 浙江卷)已知 $\lambda\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x-4, & x\geqslant\lambda,\\ x^2-4x+3, & x<\lambda.\end{cases}$ 当 $\lambda=2$ 时，不等式 $f(x)<0$ 的解集是________；若函数 $f(x)$恰有 2 个零点，则 λ 的取值范围是________.

解析　当 $\lambda=2$ 时，$f(x)=\begin{cases}x-4, & x\geqslant 2,\\ x^2-4x+3, & x<2,\end{cases}$

其图象如图(1).由图知 $f(x)<0$ 的解集为(1，4).



(1)　　(2)

若 $f(x)=\begin{cases}x-4, & x\geqslant\lambda,\\ x^2-4x+3, & x<\lambda\end{cases}$ 恰有 2 个零点有两种情况：

①二次函数有两个零点，一次函数无零点；②二次函数与一次函数各有一个零点.

在同一平面直角坐标系中画出 $y=x-4$ 与 $y=x^2-4x+3$ 的图象，如图(2)，平移直线 $x=\lambda$，可得 $\lambda\in(1，3]\cup(4，+\infty)$.

答案　(1，4)　$(1，3]\cup(4，+\infty)$