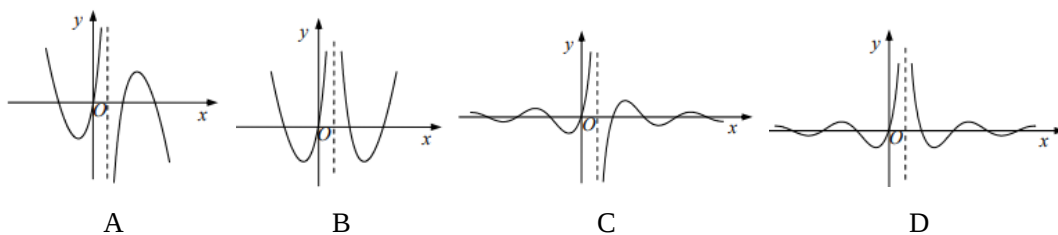


江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第二学期高二数学 周三练习 1

21.2.24

一、选择题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

- 已知 $z = (m+3) + (m-1)i$ 在复平面内对应的点在第四象限，则实数 m 的取值范围是()
A. $(-3,1)$ B. $(-1,3)$ C. $(1,+\infty)$ D. $(-\infty,-3)$
- 若抛物线 $y=x^2-x+c$ 上一点 P 的横坐标是 -2 ，抛物线在点 P 处的切线恰好过坐标原点，则 c 的值为()
A.3 B.4 C.-3 D.-4
- 已知 $2+i$ 是关于 x 的方程 $x^2+ax+5=0$ 的根，则实数 $a=$
A. $2-i$ B. -4 C. 2 D. 4
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $2(a_1+a_3+a_5)+3(a_8+a_{10})=60$ ，则 S_{11} 的值为
A.33 B.44 C.55 D.66
- 函数 $y = \frac{\sin \pi x}{|2x-1|}$ 的图象大致为



- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2，前 n 项和为 S_n ，且 S_1, S_2, S_4 成等比数列，令 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+2}}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，若对于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ，不等式 $T_n < \lambda$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围是()
A. $\lambda \geq \frac{1}{3}$ B. $\lambda > \frac{1}{5}$ C. $\lambda \geq \frac{1}{5}$ D. $\lambda > 0$

二、不定项选择题（本大题共 2 小题，共 10 分）

- 下列命题正确的是
A. 若 $a > b$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. 若 $ac > bc$ ，则 $a > b$
C. 若 $a > b, c > d$ ，则 $a-d > b-c$ D. 若 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ，则 $a < b$

- 已知 i 为虚数单位，则下面命题正确的是()

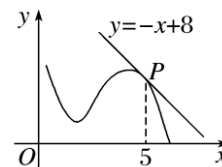
- 若复数 $z = 3 + i$ ，则 $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{i}{10}$
- 复数 z 满足 $|z - 2i| = 1$ ， z 在复平面内对应的点为 (x, y) ，则 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$
- 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 = \bar{z}_2$ ，则 $z_1 z_2 \geq 0$
- 复数 $z = 1 - 3i$ 的虚部是 3

三、填空题（本大题共 2 小题，共 10.0 分）

- 若函数 $f(x) = x^2 - c$ 在区间 $[1, m]$ 上的平均变化率为 3，则 $m =$ _____.
- 已知双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$ ，写出双曲线 C 的一个标准方程：_____.

11. 如图, 函数 $y=f(x)$ 的图象在点 P 处的切线方程是 $y=-x+8$, 则 $f(5)+f'(5)=$ _____.

12. 复数 z 满足 $|z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$, 则 $|z|$ 的最大值为_____.



四、解答题 (本大题共 2 小题, 共 36.0 分)

13. 已知抛物线 $y=2x^2+1$ 分别满足下列条件, 求出切点的坐标.

- (1) 切线的倾斜角为 45° ;
- (2) 切线平行于直线 $4x-y-2=0$;
- (3) 切线垂直于直线 $x+8y-3=0$.

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 坐标原点 O 到直线 BD 的距离是 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$,

其中 B, D 的坐标分别为 $(0, b), (-\frac{3}{2}, 0)$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 是否存在过点 D 的直线 l 与双曲线 C 交于 M, N 两点, 使得 $\triangle BMN$ 构成以 B 为顶点的等腰三角形? 若存在, 求出所有直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第二学期高二数学

周三练习 1

21.2.24

一、选择题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

1. 已知 $z = (m + 3) + (m - 1)i$ 在复平面内对应的点在第四象限，则实数 m 的取值范围是()
 A. $(-3, 1)$ B. $(-1, 3)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, -3)$

答案 A

2. 若抛物线 $y = x^2 - x + c$ 上一点 P 的横坐标是 -2 ，抛物线在点 P 处的切线恰好过坐标原点，则 c 的值为()
 A. 3 B. 4 C. -3 D. -4

答案 B

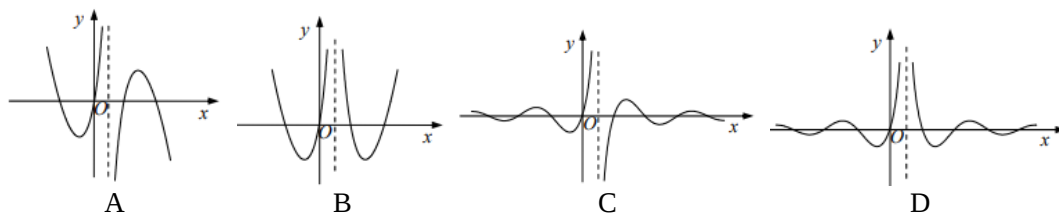
3. 已知 $2 + i$ 是关于 x 的方程 $x^2 + ax + 5 = 0$ 的根，则实数 $a =$
 A. $2 - i$ B. -4 C. 2 D. 4

答案 B

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $2(a_1 + a_3 + a_5) + 3(a_8 + a_{10}) = 60$ ，则 S_{11} 的值为
 A. 33 B. 44 C. 55 D. 66

答案 C

5. 函数 $y = \frac{\sin \pi x}{|2x - 1|}$ 的图象大致为



答案 C

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2，前 n 项和为 S_n ，且 S_1, S_2, S_4 成等比数列，令 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+2}}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的

前 n 项和为 T_n ，若对于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ，不等式 $T_n < \lambda$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围是

- A. $\lambda \geq \frac{1}{3}$ B. $\lambda > \frac{1}{5}$ C. $\lambda \geq \frac{1}{5}$ D. $\lambda > 0$

答案 A

二、不定项选择题（本大题共 2 小题，共 10 分）

7. 下列命题正确的是

- A. 若 $a > b$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. 若 $ac > bc$ ，则 $a > b$
 C. 若 $a > b, c > d$ ，则 $a - d > b - c$ D. 若 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ，则 $a < b$

答案 CD

8. 已知 i 为虚数单位，则下面命题正确的是()

- A. 若复数 $z = 3 + i$ ，则 $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{i}{10}$
 B. 复数 z 满足 $|z - 2i| = 1$ ， z 在复平面内对应的点为 (x, y) ，则 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$
 C. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 = \bar{z}_2$ ，则 $z_1 z_2 \geq 0$
 D. 复数 $z = 1 - 3i$ 的虚部是 3

答案 ABC

三、填空题（本大题共 2 小题，共 10.0 分）

9. 若函数 $f(x) = x^2 - c$ 在区间 $[1, m]$ 上的平均变化率为 3，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 2

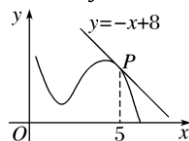
解析 由题意得 $\frac{(m^2 - c) - (1^2 - c)}{m - 1} = 3$,

所以 $m = 2$ ($m = 1$ 舍去).

10. 已知双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$ ，写出双曲线 C 的一个标准方程: $\underline{\hspace{2cm}}$.

$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (答案不唯一)

11. 如图，函数 $y = f(x)$ 的图象在点 P 处的切线方程是 $y = -x + 8$ ，则 $f(5) + f'(5) = \underline{\hspace{2cm}}$.



答案 2

12. 复数 z 满足 $|z + 3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$ ，求 $|z|$ 的最大值.

解 方法一 $|z + 3 - \sqrt{3}i| \geq ||z| - |3 - \sqrt{3}i||$,

又 $\because |z + 3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$,

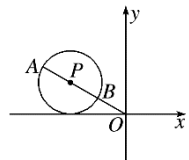
$|3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$,

$\therefore ||z| - 2\sqrt{3}| \leq \sqrt{3}$,

即 $\sqrt{3} \leq |z| \leq 3\sqrt{3}$,

$\therefore |z|$ 的最大值为 $3\sqrt{3}$.

方法二 $|z + 3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$ 表示以 $-3 + \sqrt{3}i$ 对应的点 P 为圆心，以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆，如图所示，



则 $OP = |-3 + \sqrt{3}i| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$,

显然 $|z|_{\max} = OA = OP + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

四、解答题（本大题共 2 小题，共 36.0 分）

13. 已知抛物线 $y = 2x^2 + 1$ 分别满足下列条件，求出切点的坐标.

(1) 切线的倾斜角为 45° ;

(2) 切线平行于直线 $4x - y - 2 = 0$;

(3) 切线垂直于直线 $x + 8y - 3 = 0$.

解 设切点坐标为 (x_0, y_0) ，切线斜率为 k ,

则 $\Delta y = 2(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - 2x_0^2 - 1 = 4x_0 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2$, $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x_0 + 2\Delta x$,

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 4x_0$, 即 $f'(x_0) = 4x_0$.

(1) $\because$ 抛物线的切线的倾斜角为 45° ,

$\therefore k = \tan 45^\circ = 1$, 即 $f'(x_0) = 4x_0 = 1$,

解得 $x_0 = \frac{1}{4}$,

$\therefore$ 切点坐标为 $(\frac{1}{4}, \frac{9}{8})$.

(2) $\because$ 抛物线的切线平行于直线 $4x - y - 2 = 0$,

$\therefore k = 4$, 即 $f'(x_0) = 4x_0 = 4$, 解得 $x_0 = 1$,

$\therefore$ 切点坐标为 $(1, 3)$.

(3) ∵ 抛物线的切线与直线 $x+8y-3=0$ 垂直,

$$\therefore k \left(-\frac{1}{8} \right) = -1, \text{ 即 } k=8,$$

$$\therefore f'(x_0) = 4x_0 = 8, \text{ 解得 } x_0 = 2,$$

∴ 切点坐标为 $(2, 9)$.

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 坐标原点 O 到直线 BD 的距离是 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$,

其中 B, D 的坐标分别为 $(0, b), (-\frac{3}{2}, 0)$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 是否存在过点 D 的直线 l 与双曲线 C 交于 M, N 两点, 使得 $\triangle BMN$ 构成以 B 为顶点的等腰三角形? 若存在, 求出所有直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

解: (1) ∵ 双曲线焦距为 $2\sqrt{5}$

$$\therefore 2c = 2\sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

$$\therefore B(0, b), D(-\frac{3}{2}, 0)$$

$$\therefore k_{BD} = \frac{b}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2b}{3}$$

$$y = -\frac{2b}{3}x + b$$

$$\text{化为一般式: } 2bx - 3y + 3b = 0$$

$$\therefore O \text{ 到直线 } BD \text{ 距离为 } \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\therefore \frac{3b}{\sqrt{4b^2+9}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{解得 } b=1$$

$$\therefore a^2 = c^2 - b^2 = 5 - 1 = 4$$

$$\therefore \text{双曲线 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

(2) 可判断出直线 l 斜率存在, 设斜率为 k .

$$\text{则直线 } l: y = k(x + \frac{3}{2})$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), MN \text{ 中点 } G(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$$

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 4 \\ y = k(x + \frac{3}{2}) \end{cases} \Rightarrow (k^2 - 1)x^2 + 12k^2x + 9k^2 + 4 = 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow k^2 < \frac{4}{7}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{12k^2}{k^2 - 1}$$

$$\therefore x_G = -\frac{6k^2}{k^2 - 1}, \text{ 代入 } y = k(x + \frac{3}{2}) \text{ 得 } y_G = -\frac{3k}{2(k^2 - 1)}$$

$$\therefore G(-\frac{6k^2}{k^2 - 1}, -\frac{3k}{2(k^2 - 1)}), \text{ 又 } B(0, 1)$$

① 若 $k=0$ 时, $\triangle BMN$ 是以 B 为顶点的等腰三角形, 符合题意.

② 若 $k \neq 0$ 时, 由 $k_{MN} \cdot k_{BG} = -1$ 得:

$$\therefore 1 + \frac{\frac{3k}{2(k^2 - 1)}}{\frac{6k^2}{k^2 - 1}} \cdot k = -1 \Rightarrow 8k^2 + 15k - 2 = 0$$

$$\text{解得: } k = -2 \text{ 或 } \frac{1}{8}$$

$$\therefore k^2 < \frac{4}{7} \quad \therefore k = \frac{1}{8} \text{ 此时 } y = \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$$

综上所述, 存在符合题意的直线 l , 方程为 $y=0$ 或 $y = \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$.