例　已知曲线 C: $y=e^{2x}-3e^{x}(x\in R)$ 任意不同两点的连线的斜率为 k,求 k 的取值范围.

解　因为 $y'=2e^{2x}-3e^{x}=2(e^{x}-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{8}$,所以 $y'\geqslant-\frac{9}{8}$,又 $y''=4e^{2x}-3e^{x}=e^{x}(4e^{x}-3)$,当 $x<\ln\frac{3}{4}$ 时,$y''<0$,曲线 C 向上凸,当 $x>\ln\frac{3}{4}$ 时,$y''>0$,曲线 C 向下凸,所以曲线在 $x=\ln\frac{3}{4}$ 处是一个拐点,而 $y'|_{x=\ln\frac{3}{4}}=-\frac{9}{8}$,根据定理的推论,$k$ 的范围比 y' 的范围少一个值 $-\frac{9}{8}$,即为 $(-\frac{9}{8},+\infty)$.

参考文献

[1] 曹军.不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$(或>)恒成立问题的导数解法之探究[J].中学数学杂志,2010(5).

[2] 华东师范大学数学系编.高等学校试用教材《数学分析》上册[M].高等教育出版社,1988.

作者简介　曹军,男,江苏通州人,1969.02—,副教授,硕士研究生,主要从事数学教学论研究.江苏教育学院分院学科带头人,南通市"226"高层人才青年科学技术带头人,江苏教育学院分院十五优秀教学奖和科研奖获得者,近几年来有40余篇论文在省级以上刊物发表,多篇论文获省市一等奖.

问渠哪得清如许,为有课本活水来

——高三解题教学设计

江苏南京市雨花台中学　210012　刘进全

新课程理念下,如何使用课本使高三数学课堂教学更加有效是广大一线教师关心的话题之一.文[1]指出"大量的课堂观察中发现,脱离课本进行教学的现象很普遍,这是令人担忧的,本次新课改提倡的'不是教教材,而是用教材教',要'创造性地使用教材'."那么高三复习时如何创造性使用教材,关键是例题的选择.教材中的许多问题(例题、习题、思考题)具有较强的基础性,入口浅,利于学生的"双基"的夯实,同时将这些问题进行深入的挖掘和拓展整合,引申设计高三复习课的例题,这样的课堂必然是高效的,设计的原则如下:(1)一题多解,展示多种解题思路,提高综合分析能力;(2)一题多变,变换条件和考查方式,多方考查;(3)多题一解,总结解题规律;(4)巧设探究情境,改变学习方式.笔者以苏教版必修4(以下简称课本)文[2]中例题、习题、思考题设计为例,加以说明,愿与同行交流.

1　一题多解

在教学中,依托课本,针对学生最近发展区域精心设计多解性例题,引导学生从不同的方面,用不同的思维方式进行广泛的探索与求解,领悟解题过程中所涉及知识之间的纵横联系及方法的变化联系,使学生的知识系统化、结构化.克服单纯做题的机械呆板的模式,转变为:做一题,明白一串道理,巩固一串知识,培养一串能力,掌握处理一串问题的方法.

例1　矩形 $MNPQ$ 内接于半径为 r 的圆(图1),求矩形面积最大值.(课本 P_{106} 思考题)

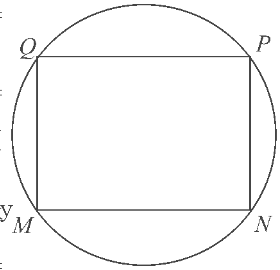


图1

解　设 $QM=x$,$MN=y$,则 $x^2+y^2=4r^2$.

$S_{MNPQ}=xy=x\sqrt{4r^2-x^2}(0<x<2r)(*)$.

解法1　由 $S_{MNPQ}=xy=x\sqrt{4r^2-x^2}=\sqrt{x^2(4r^2-x^2)}$,令 $x^2=u\in(0,4r^2)$,则 $S_{MNPQ}=\sqrt{u(4r^2-u)}=\sqrt{-(u-2r^2)^2+4r^4}$,当 $u=2r^2$ 即 $x=\sqrt{2}r$ 时,S_{MNPQ} 最大为 $2r^2$.

解法2　同上,$S_{MNPQ}=\sqrt{u(4r^2-u)}$,平方得:$S^2=u(4r^2-u)$,$u^2-4r^2u+S^2=0$ 有解,$\Delta=16r^4-4S^2\geqslant0$,即 $S\leqslant2r^2$,等号在 $x=\sqrt{2}r\in(0,2r)$ 取得,所以 S_{MNPQ} 最大为 $2r^2$.

解法3　$S_{MNPQ}=\sqrt{x^2y^2}\leq\sqrt{(\frac{x^2+y^2}{2})^2}=2r^2$,当且仅当 $x=y=\sqrt{2}r$ 时取等号.

解法4　对(*)式,令 $x=2r\cos\alpha$,$y=2r\sin\alpha$,$\alpha\in[0,2\pi]$,$S_{MNPQ}=2r^2\sin2\alpha$,S_{MNPQ} 最大为 $2r^2$.

解法5 $S(x)=x\sqrt{4r^2-x^2}$,

$$S'(x)=\sqrt{4r^2-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{4r^2-x^2}}=\frac{4r^2-2x^2}{\sqrt{4r^2-x^2}}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}r$, $S(x)$ 在 $(0,\sqrt{2}r)$ 增, $S(x)$ 在 $(\sqrt{2}r,2r)$ 减, 所以当 $x=\sqrt{2}r$ 时, S_{MNPQ} 最大为 $2r^2$.

解法6 $S=x\sqrt{4r^2-x^2}$, 得 $\frac{S}{x}=\sqrt{4r^2-x^2}$, 曲线 $y=\frac{S}{x}$ 与 $y=\sqrt{4r^2-x^2}$ 相切时, 即曲线 $y=\frac{S}{x}$ 与半圆 $x^2+y^2=4r^2(y\geqslant 0)$ 相切时 S_{MNPQ} 最大为 $2r^2$.

解法7 设 $\angle PMN=\theta$, $PN=2r\sin\theta$, $MN=2r\cos\theta$, $S_{MNPQ}=2r^2\sin 2\theta$, $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$, 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, S_{MNPQ} 最大为 $2r^2$.

解法8 连 QN, $S_{MNPQ}=2S_{\triangle PQN}$, 显然 P 到 QN 的距离达到最大 r 时, S_{MNPQ} 取最大值为 $2r^2$.

小结 解法1—6本质上对函数 $y=x\sqrt{4r^2-x^2}(0<x<2r)$ 求最值使用的是常用方法. 解法7, 选择变量 $\angle PMN=\theta$, 建立函数模型, 三角化简. 解法8, 根据图形特征, $S_{MNPQ}=2S_{\triangle PQN}$, 巧妙转化, 以退为进, 数形结合. 本题用浅显例子, 说明了许多道理.

2 一题多变

在教学中, 在有限的教学时间内去努力提高学生的学习效率, 一题多变的教学是提高效率的有效途径之一, 通过改变已知条件或结论, 做到一题多用, 充分发挥题目的迁移作用, 受到解一题会一片的效果, 帮助学生摆脱题海, 大大提高了复习效率.

变1 矩形 $MNPQ$ 内接于半径为 r 的半圆, 求矩形面积最大值. (课本 P_{107} 页例5)

解 设 $\angle PON=\theta$, $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$, $PN=r\sin\theta$, $MN=2r\cos\theta$, $S_{MNPQ}=r^2\sin 2\theta$, 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, S_{MNPQ} 最大为 r^2. 此时恰好是例1的最大面积的一半. 这里可以将半圆补成整圆, 再考虑(方法不再赘述).

变2 矩形 $MNPQ$ 内接于半径为 r 的扇形, $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$, 求矩形面积最大值. (课本 P_{115} 第14题)

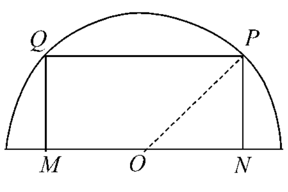


图2

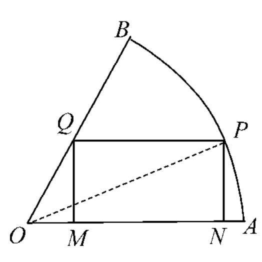


图3

解 经过分析, 较好的方法为: $\angle AOP=\theta$, $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$, $PN=r\sin\theta$, $MN=ON-OM=r\cos\theta-\frac{r\sin\theta}{\tan\frac{\pi}{3}}=r\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta$,

$$S_{MNPQ}=r\sin\theta\left(r\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}r^2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}r^2,$$

当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时, S_{MNPQ} 最大为 $\frac{\sqrt{3}}{6}r^2$.

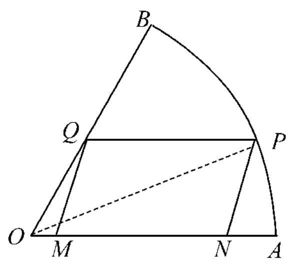


图4

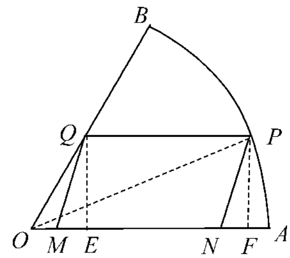


图5

变3 如图4, 现在要在一块半径为 r, 圆心角为 60° 的扇形纸板 AOB 上剪出一个平行四边形 $MNPQ$, 使点 P 在 AB 弧上, 点 Q 在 OB 上, 点 M, N 在 OA 上, 设 $\angle AOP=\theta$, 求平行四边形 $MNPQ$ 的面积 S 的最大值.

解 分别过点 P, Q 作 $PF\perp OA$, $QE\perp OA$, 垂足分别为 F, E, (如图5) 则矩形 $EFPQ$ 面积与平行四边形 $MNPQ$ 的面积一样, 解法同上, 易得平行四边形 $MNPQ$ 的面积 S 的最大值 $\frac{\sqrt{3}}{6}r^2$.

变4 矩形 $MNPQ$ 内接于半径为 r 的扇形, $\angle AOB=\alpha$, 求矩形面积最大值. (一般化, 得规律)

解 设 $\angle AOP=\theta$, $\theta\in(0,\alpha)$, $PN=r\sin\theta$, $MN=ON-OM=r\cos\theta-\frac{r\sin\theta}{\tan\alpha}$,

$$S_{MNPQ}=r\sin\theta\left(r\cos\theta-\frac{r\sin\theta}{\tan\alpha}\right)=\frac{r^2}{2}\left(\sin 2\theta-\frac{1-\cos 2\theta}{\tan\alpha}\right)=\frac{r^2}{2}\left(\sin 2\theta+\frac{\cos 2\theta}{\tan\alpha}\right)-\frac{r^2}{2\tan\alpha}=$$
$$\frac{r^2}{2\sin\alpha}(\sin 2\theta\sin\alpha+\cos 2\theta\cos\alpha)-\frac{r^2}{2\tan\alpha}=\frac{r^2}{2\sin\alpha}\cos(2\theta-\alpha)-\frac{r^2}{2\tan\alpha},$$

当 $\theta=\frac{\alpha}{2}$ 时 S_{MNPQ} 最大为 $\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\tan\alpha}\right)=\frac{r^2}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$.

3 多题一解

从一系列问题的求解中，找出共性，提炼出其思想方法，授人以“渔”．由变式 1－4 可以得到解决这一类建立函数模型，求解应用问题的方法和步骤：（1）分析函数变化的动因（选择变量）；（2）列出函数解析式（变量的定义域）；（3）求出最大（小）函数值及对应自变量；（4）答．具体的讲：上面的例题和变式的问题选择变量为角（圆周角或圆心角）处理起来比较简单．

如：在一个直径为 $2r$ 的半圆形铁皮上截取一个以直径 BC 为斜边的直角三角形 ABC，然后在所得直角三角形铁皮上截取一个正方形铁皮，其一边在 BC 上（如图 6），则正方形铁皮的面积最大值为______．

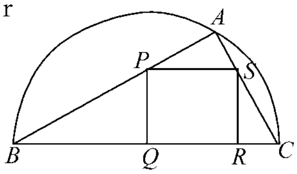


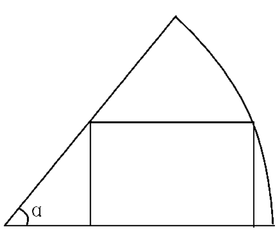
图 6

解 设 $\angle ABC=\alpha$，正方形边长为 a，$BQ=\frac{a}{\tan\alpha}$，$RC=a\tan\alpha$，$BC=2r=\frac{a}{\tan\alpha}+a+a\tan\alpha$，所以 $a=\frac{2r}{1+\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}}\left(\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$，当且仅当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时取等号，正方形铁皮的面积最大值为 $\frac{4r^2}{9}$．

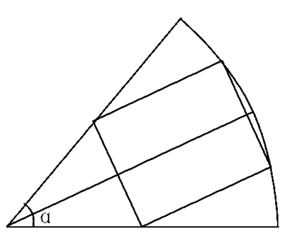
4 巧设探究情境，改变学习方式

美国教育家布鲁纳发现理论指出：学生不是被动的、消极的知识接受者，而是主动的、积极的知识探究者．在高三复习课设计中安排设计探究片断，让学生探究．经历数学构建过程，避免复习过程中形式单一，充分调动学生的主动性、自主性和积极性，从而改变学习方式．

变 5 已知扇形的圆心角为 α（定值），半径为 r（定值），分别按图一、二作扇形的内接矩形，若按图一作出的矩形面积的最大值为 $\frac{1}{2}r^2\tan\frac{\alpha}{2}$，则按图二作出的矩形面积的最大值为______．



图一



图二

分析 （本题让学生探究求解最值）将图二扇形一分为二，学生可以用变式 4方法处理，这里也可以运用类比的思想，图二可以看成两个图一圆心角为 $\frac{\alpha}{2}$ 的扇形，每个扇形中的矩形面积最大为 $\frac{1}{2}r^2\tan\frac{\alpha}{4}$，易得图二中矩形面积最大 $r^2\tan\frac{\alpha}{4}$．

变 6 扇形的圆心角为 α，分别按图一、二在扇形内截一个矩形，哪个矩形面积更大？

解析 （此问在变 5之后，提问自然，进一步探究）图一矩形面积最大 $S_1(x)=\frac{1}{2}r^2\tan\frac{\alpha}{2}$，图二矩形面积最大 $S_2(x)=r^2\tan\frac{\alpha}{4}$，$S_1(x)-S_2(x)=r^2\left(\frac{1}{2}\tan\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{4}\right)=r^2\tan\frac{\alpha}{4}\cdot\frac{\tan^2\frac{\alpha}{4}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{4}}$（＊＊），（此时引导学生对 α 的认识），因为当 $\alpha>\frac{\pi}{2}$ 时，$S_1(x)=\frac{1}{2}r^2$（定值），$S_2(x)=r^2\tan\frac{\alpha}{4}$，所以当 $0<\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ 时，由（＊＊）式，得 $S_1(x)>S_2(x)$，当 $\alpha>\frac{\pi}{2}$ 时，考虑 $S_1(x)=S_2(x)$，即 $\frac{1}{2}r^2=r^2\tan\frac{\alpha}{4}$，得 $\tan\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{2}$，即有 $\tan\alpha=-\frac{24}{7}$，利用几何画板中度量计算．易得 $\alpha\approx106^\circ26'$，所以当 $\alpha\in(0^\circ,106^\circ26')$，$S_1(x)>S_2(x)$，$\alpha\in(106^\circ26',108^\circ)$，$S_1(x)<S_2(x)$，当 $\alpha=180^\circ$ 时，$S_1(x)=S_2(x)=r^2$．

变式 7 若 $\alpha\in(180^\circ,360^\circ)$，$S_1(x)$ 与 $S_2(x)$ 谁更大？

分析 （在原有的基础上，继续探究，层层递进）从扇形中截取半圆，按图一截取矩形面积最大 $S_1(x)=r^2$（如图 7），如按图二截取矩形，根据对称性，亦可截取半圆考虑，易得 $S_2(x)=r^2$（如图 8），得 $S_1(x)=S_2(x)$．

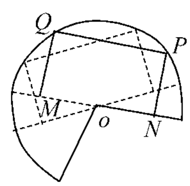


图 7

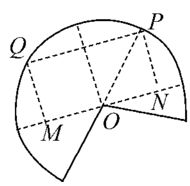


图 8

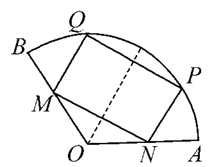


图 9

变式 8 矩形 $MNPQ$ 内接于半径为 r 的扇形（图 9），$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，求截取矩形面积最大值．

解析 （得一般结论后，赏析，再学以致用）由

变 6、变 7, 易得: S_{MNPQ} 最大为 $\frac{\sqrt{3}}{3}r^2$.

5　结束语

高三复习课中的解题教学三部曲:选题——讲题——变题.从教材中整合朴实无华的练习和思考题,这样的习题看似平淡无奇,但细细品味,内涵深刻,回味无穷,讲解时既注重通解通法,也不失奇思妙想,改变习题的设问方向或对习题拓展延伸,归纳总结一类问题最本质的解法,从而达到举一反三,融会贯通的教学目的,另外解题教学的实施过程要有一定的探索性、师生的互动性、学生的主动性.总之,根植于课本,为有课本活水来.

参考文献

[1] 章建跃.中学数学课改的十个论题[J].中学数学教学参考(上旬),2010,(5).

[1] 单主编.苏教版课程标准实验教科书·数学 4[M].南京:江苏教育出版社,2006.

[1] 罗腾根,黄俭.整合课本习题开展探究活动[J].中学数学杂志,2009,(5).

[4] 张彬.教师应当注重对教材的使用与挖掘[J].中学数学教学参考(上旬),2010,(1,2).

以两条相交直线为背景的点的轨迹问题

山东省济宁市实验中学数学组　272300　苗相军　韩崇锋

在平面上,到两定点的距离之比为常数 $\lambda(\lambda>0)$ 的点的轨迹是直线或圆;到两定点距离之和或之差的绝对值为常数 $2a$(其中 $a>0$, $2a$ 大于两定点距离或 $2a$ 小于两定点距离)的点的轨迹是椭圆或双曲线.那么我们自然联想,以两条相交定直线为背景的点的轨迹又是什么呢?

问题 1　到两相交定直线的距离的和为常数 $m(m>0)$ 的点的轨迹是什么图形?

如图 1 所示,以两直线的交点为坐标原点,角平分线所在的直线为 x 轴和 y 轴,建立平面直角坐标系.设轨迹上任意点的坐标 $P(x,y)$,直线 l_1 的方程为: $y=kx\ (k>0)$,直线 l_2 的方程为: $y=-kx$,这时 P 点到两直线的距离分别为:

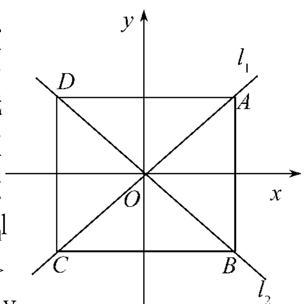


图 1

$$d_1=\frac{|kx-y|}{\sqrt{1+k^2}},\quad d_2=\frac{|kx+y|}{\sqrt{1+k^2}}$$

根据题意得: $d_1+d_2=\frac{|kx-y|}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{|kx+y|}{\sqrt{1+k^2}}=m\quad(m>0)$,

即 $|kx-y|+|kx+y|=m\sqrt{1+k^2}$　　(1)

当 $\begin{cases}kx-y\geqslant 0\\kx+y\geqslant 0\end{cases}$ 时,方程(1)为线段 $x=\frac{m\sqrt{1+k^2}}{2k}$,端点为点 $A(\frac{m\sqrt{1+k^2}}{2k},\frac{m\sqrt{1+k^2}}{2})$ 和点 $B(\frac{m\sqrt{1+k^2}}{2k},-\frac{m\sqrt{1+k^2}}{2})$.

当 $\begin{cases}kx-y\geqslant 0\\kx+y<0\end{cases}$ 时,方程(1)为线段 $y=-\frac{m\sqrt{1+k^2}}{2}$,端点为点 B 和点 $C(-\frac{m\sqrt{1+k^2}}{2k},-\frac{m\sqrt{1+k^2}}{2})$.当 $\begin{cases}kx-y<0\\kx+y\leqslant 0\end{cases}$ 时,方程(1)为线段 $x=-\frac{m\sqrt{1+k^2}}{2k}$,端点为点 C 和点 $D(-\frac{m\sqrt{1+k^2}}{2k},\frac{m\sqrt{1+k^2}}{2})$.

当 $\begin{cases}kx-y<0\\kx+y>0\end{cases}$ 时,方程(1)为线段 $y=\frac{m\sqrt{1+k^2}}{2}$,端点为点 D 和点 A.

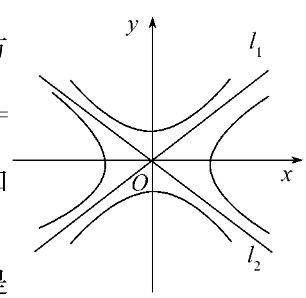


图 2

综上:点 P 的轨迹是矩形 $ABCD$.

思考　到两条相交定直线的距离之差的绝对值为常数 $m(m>0)$ 的点的轨迹是什么图形?

问题 2　到两相交定直线的距离之积为常数