低起点，小步子，炼方法

——《圆锥曲线的离心率问题》高三复习课教学思考与设计

单铭成

（南京大学附属中学，210008）

摘　要：《圆锥曲线的离心率问题》高三复习课教学，可从一些直接或稍有变化地运用离心率定义或公式就能解决的简单题目出发，让学生回顾、熟悉解决这类问题最基本的知识与方法，较快地进入学习状态；再设计几道基于焦点三角形条件的典型题目，并通过变式串联，层层递进，让学生深入研究这一类重要的子问题，并对每一道题目多角度地思考，获得多种解法；再做比较与总结，从而既掌握通性通法，又学会特殊技巧，能灵活分析同类问题，恰当选择应对方法。

关键词：《圆锥曲线的离心率问题》　高三复习课　教学设计

圆锥曲线的离心率是反映圆锥曲线形状特征的一个重要的量，是高中数学《圆锥曲线》单元的重要知识（概念）。圆锥曲线的离心率问题是近些年江苏和全国其他地区高考的一个热点。因此，笔者设计和实施了以此为主题的高三复习课教学。

一、教学思考

圆锥曲线的离心率问题可以分为求椭圆或双曲线离心率的值和求椭圆或双曲线离心率的取值范围两类。具体题目综合性较强，条件灵活多变。最常见的条件与椭圆或双曲线的焦点三角形有关。

要求椭圆或双曲线离心率的值或取值范围，首先，要掌握基于椭圆或双曲线第一定义的离心率定义 $e=\frac{c}{a}$（c 为半焦距，即两焦点间距离的一半；a 为长或实半轴长，即圆锥曲线上的点到两焦点的距离的和或差的一半），以

及基于椭圆或双曲线第二定义的离心率公式 $e=\frac{d_{PF}}{d_{Pl}}$（d_{PF} 为圆锥曲线上的点到焦点的距离，d_{Pl} 为该点到相应准线的距离）；其次，要能数形结合，抓住椭圆或双曲线的标准方程（包括变形结论）和几何性质（包括定义），充分转化已知条件（通常是几何条件），建立 a、b、c 的齐次方程或不等式。

笔者执教班级的学生学习基础一般，对圆锥曲线离心率的定义和公式的记忆基本没有问题，但是不太能灵活运用，遇到复杂条件的转化时，更是容易迷失方向，找不到方法。

因此，本节课例（习）题的设置应该注意"低起点，小步子，炼方法"，从而让学生跟得上、学得会、带得走。具体地，可从一些直接或稍有变化地运用离心率定义或公式就能解决的简单题目出发，让学生回顾、熟悉解决这类问题最基本的知识与方法，较快地进入学习状态；再设计几道基于焦点三角形条件的典型题目，并通过变式串联，层层递进，让学生深入研究这一类重要的子问题，并对每一道题目多角度地思考，获得多种解法；再做比较与总结，从而既掌握通性通法，又学会特殊技巧，能灵活分析同类问题，恰当选择应对方法。这样，才能避免"过分拔高"和"题海战术"，让教学有实效、更高效。

二、教学设计

（一）简单练习：低起点

练习 1　如果椭圆的长半轴长为 5，焦距为 6，那么椭圆的离心率为________。

练习 2　在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{m^2+4}=1$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，则 m 的值为________。

练习 3　已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则该双曲线的离心率为________。

练习 4　若以椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 $F(-c,0)$ 为圆心、半焦距 c 为半径的圆与椭圆的左准线交于不同的两点，则该椭圆离心率的取值范围是________。

练习 1 从几何性质的角度给出 a、c 的值，引导学生直接运用椭圆离心率的定义求出椭圆离心率的值（答案为 $\frac{3}{5}$）。

练习 2 从标准方程的角度给出 a、b 的表达式，引导学生变形运用双曲线离心率的定义（$\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$），基于双曲线离心率的值逆向求出表达式中参数的值（答案为 2）。

练习 3 从几何性质和标准方程结合的角度（渐近线的方程）给出 $\frac{b}{a}$ 的值，引导学生变形运用双曲线离心率的定义 $\left(\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\right)$ 求出双曲线离心率的值（答案为 2），让学生认识到求出 a、b、c 的比值即可，感悟出可以建立 a、b、c 的齐次方程。

练习 4 融合其他图形，从几何性质的角度给出 a、c 的齐次不等式 $\left(\frac{a^2}{c}-c<c\right)$，引导学生逆向（代入）运用椭圆离心率的定义求出椭圆离心率的取值范围（答案为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$），让学生强化对建立 a、b、c 的齐次不等式的感悟。

这四道练习题都比较简单，符合"低起点"的要求；在逐步增加难度的同时，关注条件变化的基本方面和问题解决的基本方法。

（二）典型例题：小步子

例 1　设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1、F_2，过点 F_1 的椭圆长轴的垂线交椭圆上半部于点 P，若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰

直角三角形，求该椭圆的离心率。

例 2 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为 F_1、F_2，P 为椭圆上的任意一点，若$\triangle F_1PF_2$为等腰直角三角形，求该椭圆的离心率。

例 3 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为 F_1、F_2，若椭圆上存在一点 P，使得$\angle F_1PF_2=90°$，求该椭圆的离心率的取值范围。

例 4 已知 F_1、F_2是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点，$O$ 为坐标原点，P 为双曲线上的任意一点，若$\triangle OPF_2$为正三角形，求该双曲线的离心率。

例 1 的条件非常特殊：如图 1，焦点三角形是等腰直角三角形且左焦点是直角顶点，即 $PF_1=F_1F_2$ 且 $PF_1\perp F_1F_2$。因此，通过几何直观，很容易得到 $PF_1=F_1F_2=2c$，$PF_2=2\sqrt{2}c$，且点 P 的横坐标为 $-c$。于是，有这样几种建立 a、b、c 的齐次方程，从而求出 e 的值的方法：(1) 由椭圆的第一定义得 $(2+2\sqrt{2})c=2a$，解得 $e=\sqrt{2}-1$；(2) 由椭圆的第二定义得$\frac{2c}{\frac{a^2}{c}-c}=\frac{c}{a}$，解得 $e=\sqrt{2}-1$；(3) 由椭圆的标准方程得$\frac{c^2}{a^2}+\frac{4c^2}{b^2}=1$，即$\frac{b}{a}=\frac{2c}{b}$，解得 $e=\sqrt{2}-1$。

例 2 是例 1 的变式，条件的一般性增加：如图 2、图 3，焦点三角形还是等腰直角三角形，但 F_1、F_2、P 都可能是直角顶点，要结合椭圆的对称性，分类讨论，答案是$\sqrt{2}-1$ 或$\frac{\sqrt{2}}{2}$。对于图 3 所示的 P 是直角顶点的情况，利用椭圆的对称性不难得到 P 是椭圆的上或下顶点，$\triangle OPF_1$ 和$\triangle OPF_2$ 是以 a、b、c 为三边长的特征三角形。

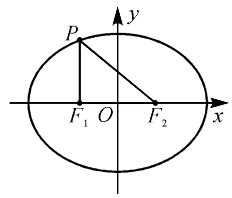

图 1

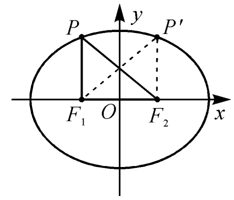

图 2

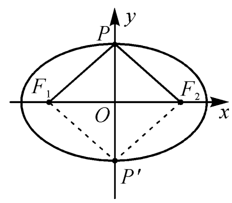

图 3

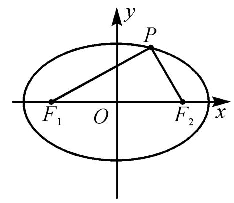

图 4

例 3 是例 2 的变式，条件的一般性继续增加：如图 4，焦点三角形是直角三角形且椭圆上的点是直角顶点，即$\angle F_1PF_2=90°$。于是，可得这样几种转化几何条件，建立 a、b、c 的齐次不等式，从而求出 e 的取值范围的方法：(1) 点 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上，即 $OP=\frac{1}{2}F_1F_2=c$，结合椭圆的几何性质 $OP\in[b,a]$，可得 $b\leqslant c\leqslant a$，解得 $e\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$；(2) $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，设 $P(x,y)$，由 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$，得 $x^2-c^2+y^2=0$，又由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，消去 y^2，可得 $c^2-x^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2=a^2-c^2-x^2+\frac{c^2}{a^2}x^2$，即得$\frac{c^2}{a^2}x^2=2c^2-a^2$，又由 $-a<x<a$，可得 $0\leqslant 2c^2-a^2\leqslant c^2$，解得 $e\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$；(3) 由余弦定理（此处即勾股定理），可得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{PF_1^2+PF_2^2-F_1F_2^2}{2PF_1\cdot PF_2}=0$，得 $PF_1^2+PF_2^2=4c^2$，又 $PF_1+PF_2=2a$，由基本不等式的变形 $2(PF_1^2+PF_2^2)\geqslant(PF_1+PF_2)^2$，可得 $8c^2\geqslant$

$4a^2$，解得 $e\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$。

这三道例题都是基于焦点三角形条件的题目。从例 1 到例 3，条件的一般性不断增加——从形状确定的等腰直角三角形到形状不确定的直角三角形；结论的一般性随之增加——从确定的离心率的值到不确定的离心率的取值范围。例 2 作为例 1 和例 3 的过渡，尤其凸显了“小步子”的特征。通过多种解法的比较，可以引导学生总结解决这类问题的通性通法——数形结合，抓住椭圆或双曲线的标准方程（包括变形结论）和几何性质（包括定义），充分转化已知条件（通常是几何条件），建立 a、b、c 的齐次方程或不等式；感悟可能用到的各种特殊技巧——特殊三角形的性质、正弦定理和余弦定理、向量的知识以及圆锥曲线的范围和对称性、基本不等式等。从而遇到具体问题时，不仅有一般思路，而且能选择具体方法。例 3 教学后，还可以再设计一个小的变式——将 $\angle F_1PF_2=90^\circ$ 改为 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，让学生充分体会方法的优化选择。

例 4 则是例 1 另一个角度的变式，即将焦点三角形变成“焦点、中心三角形”，将等腰直角三角形变成正三角形（形状还是确定的），将椭圆变成双曲线。基于前三道例题，求解本题的基本思路是将“焦点、中心三角形”的条件转化到焦点三角形中：连接 PF_1，由 $\triangle OPF_2$ 为正三角形，不难得到 $\triangle F_1PF_2$ 中，$\angle F_1PF_2=90^\circ$，$\angle PF_1F_2=30^\circ$，$\angle PF_2F_1=60^\circ$。这样便可采用与例 1 类似的方法，建立 a、b、c 的齐次方程，从而求出 e 的值。由此，让学生充分体会转化思想和通性通法的重要性。

（三）随堂检测

1. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 $2c$，圆 O 的圆心为原点，半径为 a，过椭圆右准线与 x 轴的交点 P 作圆 O 的两条切线，若两条切线相互垂直，则该椭圆的离心率为________。

2. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 $2c$，圆 O 的圆心为原点，半径为 a，若椭圆的右准线上存在一点 P，使得过点 P 的圆 O 的两条切线相互垂直，则该椭圆的离心率取值范围是________。

随堂检测是例题的延续和变化，可以检测课堂教学效果，拓展学生的思维。这里的两道检测题目跳出了基于焦点三角形的条件，让学生感受圆锥曲线离心率问题的多样性，提升思维的灵活性。而考虑到学生的学习基础一般，这两道检测题仍然注意“低起点，小步子”，即难度不太大、从特殊到一般变化。学生可充分利用圆的几何性质转化已知条件，建立 a、c 的齐次方程 $\frac{a^2}{c}=\sqrt{2}a$，求出第 1 题中离心率的值；再推理发现，第 1 题实际上是第 2 题中准线到中心的距离最大的情况，即离心率最小的情况，从而求出第 2 题中离心率的取值范围。

参考文献：

[1] 宋现印. 圆锥曲线离心率问题的解法剖析与思考[J]. 中学数学，2019(5).

[2] 李莹琪. 椭圆离心率求解方法探究[J]. 科学咨询(科技・管理)，2019(2).

[3] 卜萍. 浅谈椭圆离心率求值的常见方法[J]. 数学之友，2018(4).