2020-2021学年第一学期苏州市高三期中调研试卷

数　学

2021.11

一、单项选择题:本大题共8小题，每小题5分，共计40分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的.请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1.已知集合$M=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}, N=\{x\mid \log_2 x\leqslant 1\}$,则$M\cap N=$（　）

A.$[-2,3]$　　B.$[-2,2]$　　C.$(0,2]$　　D.$(0,3]$

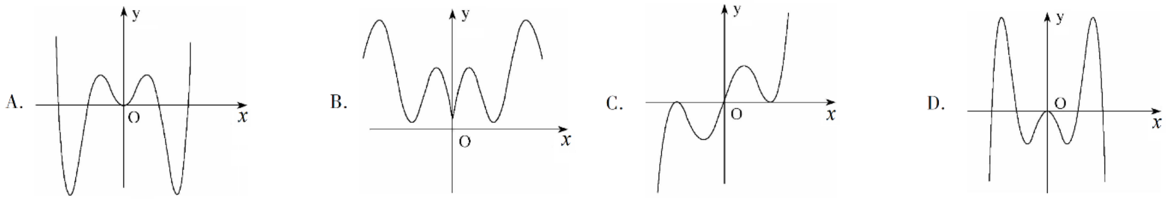
2.若$a>0, b>0$,则"$ab<1$"是"$a+b<1$"的（　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

3.若$\tan\alpha=\frac{3}{4}$,则$\frac{1+\sin 2\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=$（　）

A.$-\frac{1}{7}$　　B.-7　　C.$\frac{1}{7}$　　D.7

4.函数$f(x)=(3x-x^3)\sin x$的部分图象大致为（　）



5.已知$\triangle ABC$是边长为 1 的等边三角形,点D,E分别是边AB,BC的中点,连结DE并延长到点F,使得$DE=2EF$,则$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$的值为（　）

A.$-\frac{1}{8}$　　B.$\frac{1}{8}$　　C.1　　D.-8

6.定义方程$f(x)=f'(x)$的实数根x_0叫做函数$f(x)$的"躺平点".若函数$g(x)=1\mathrm{n}x, h(x)=x^3-1$的"躺平点"分别为$\alpha,\beta$,则$\alpha,\beta$的大小关系为（　）

A.$\alpha\geqslant\beta$　　B.$\alpha>\beta$　　C.$\alpha\leqslant\beta$　　D.$\alpha<\beta$

7.已知函数$f(x)=A\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(A>0,\omega>0)$,直线$y=1$与$f(x)$的图象在$y$轴右侧交点的横坐标依次为$a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}\cdots$,(其中$k\in\mathbf{N}^*$),若$\frac{a_{2k+1}-a_{2k}}{a_{2k}-a_{2k-1}}=2$,则$A=$（　）

A.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B.2　　C.$\sqrt{2}$　　D.$2\sqrt{3}$

8.设数列$\{a_m\}(m\in\mathbf{N}^*)$,若存在公比为q的等比数列$\{b_{m+1}\}(m\in\mathbf{N}^*)$,使得$b_k<a_k<b_{k+1}$,其中$k=1,2,\cdots,m$,则称数列$\{b_{m+1}\}$为数列$\{a_m\}$的"等比分割数列",则下列说法错误的是（　）

A.数列$\{b_5\}$; 2,4,8,16,32是数列$\{a_4\}$: 3,7,12,24的一个"等比分割数列"

B.若数列$\{a_n\}$存在"等比分割数列"$\{b_{n+1}\}$,则有$a_1<\cdots<a_{k-1}<a_k<\cdots<a_n$和$b_1<\cdots<b_{k-1}<b_k<\cdots<b_n<b_{n+1}$成立,其中$2\leqslant k\leqslant n, k\in\mathbf{N}^*$

C.数列$\{a_3\}$: $-3,-1,2$存在"等比分割数列"$\{b_4\}$

D.数列$\{a_{10}\}$的通项公式为$a_n=2^n(n=1,2,\cdots,10)$,若数列$\{a_{10}\}$的"等比分割数列"$\{b_{11}\}$的首项为1,则公比$q\in\left(2,2^{\frac{10}{9}}\right)$

二、 多项选择题:本大题共4小题，每小题5分， 共计20分．每小题给出的四个选项中，都有多个选项是正确的，全部选对的得5分，选对但不全的得2分，选错或不答的得0分，请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

9.已知实数a满足$\frac{3+a\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$(i为虚数单位),复数$z=(a+1)+(a-1)\mathrm{i}$,则（　）

A.z为纯虚数　　B.z^2为虚数　　C.$z+\bar{z}=0$　　D.$z\cdot\bar{z}=4$

10.已知不等式$x^2+2ax+b-1>0$的解集是$\{x\mid x\neq d\}$,则b的值可能是（　）

A.-1　　B.3　　C.2　　D.0

11.关于函数$f(x)=\sin|x|+|\cos x|$有下述四个结论,则（　）

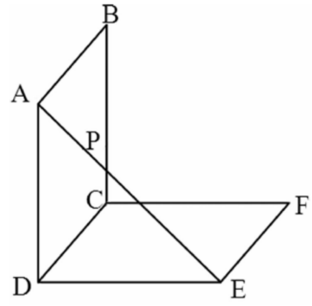
A.$f(x)$是偶函数　　B.$f(x)$的最小值为-1

C.$f(x)$在$[-2\pi,2\pi]$上有4个零点　　D.$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$单调递增

12.如图,正方形$ABCD$与正方形$DEFC$边长均为 1,平面$ABCD$与平面$DEFC$互相垂直,P是AE上的一个动点,则（　）

A.CP的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.当P在直线AE上运动时,三棱锥$D-BPF$的体积不变

C.$PD+PF$的最小值为$\sqrt{2-\sqrt{2}}$　　D.三棱锥$A-DCE$的外接球表面积为3π



12 题图

三、填空题:本大题共 4 小题， 每小题 5 分，若两个空，第一个空 2 分，第二个空 3 分，共计 20 分.请把答案填写在答题卡相应的位置上.

13.已知曲线$y=me^{x}+x\ln x$在$x=1$处的切线方程为$y=3x+n$,则$n=$___________.

14.已知数列$\{a_n\}$是等差数列,$a_1>0,a_3+3a_7=0$,则使$S_n>0$的最大整数n的值为__________.

15.某区域规划建设扇形观景水池,同时紧贴水池周边建设一圈人行步道.要求总预算费用 24 万元,水池造价为每平方米 400 元,步道造价为每米 1000 元(不考虑宽度厚度等因素),则水池面积最大值为_________平方米.

16.已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数,且$f(1-x)=f(x)$,则$f(x)$的最小正周期为______;若对任意的$x_1,x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,当$x_1\neq x_2$时,都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>\pi$,则关于$x$的不等式$f(x)\leqslant\sin\pi x$在区间$\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$上的解集为__________.

四、解答题:本大题共 6 小题，共计 70 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本小题满分 10 分)

已知向量$\boldsymbol{a}=\left(2\sin x,2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$,向量$\boldsymbol{b}=\left(\cos x,\frac{\sqrt{6}}{2}(\cos x-\sin x)\right)$,记$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}(x\in\mathbf{R})$.

(1)求$f(x)$表达式;

(2)解关于x的不等式$f(x)\geqslant 1$.

18.(本小题满分 12 分)

在下列条件: ①数列$\{a_n\}$的任意相邻两项均不相等,且数列$\{a_n^2-a_n\}$为常数列,

②$S_n=\frac{1}{2}(a_n+n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$,③$a_3=2,S_{n+1}=S_{n-1}+1(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$中,任选一个,补充在横线上,并回答下面问题.

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n,a_1=2,$__________.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n和前n项和S_n;

(2)设$b_k=\frac{1}{S_{2k}\cdot S_{2k+1}}(k\in\mathbf{N}^*)$,数列$\{b_k\}$的前$n$项和记为$T_n$,证明:$T_n<\frac{3}{4}(n\in\mathbf{N}^*)$.

19.(本小题满分 12 分)

在等腰直角三角形ABC中,已知$\angle ACB=90°$,点D,E分别在边AB,BC上,$CD=4$.

(1)若D为AB的中点,三角形CDE的面积为 4,求证:E为CB的中点;

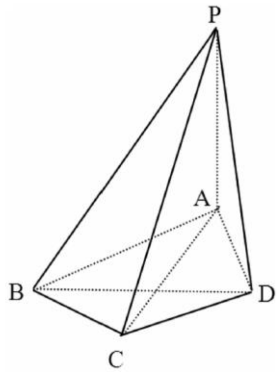
(2)若$BD=2AD$,求$\triangle ABC$的面积.

20.(本小题满分 12 分)

如图,四棱锥$P-ABCD$中,$PA\perp$底面$ABCD$,$AC=2,BC=CD=1,\angle CAD=30°,\angle ACB=60°$,$M$是$PB$上一点,且$PB=3MB$,$N$是$PC$中点.

(1)求证:$PC\perp BD$;

(2)若二面角$P-BC-A$大小为$45°$,求棱锥$C-AMN$的体积.



20 题图

21.(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=ax-\frac{1}{x}-a\ln x(a>0)$.

(1)求$f(x)$的单调区间;

(2)若$f(x)$有两个极值点$x_1,x_2(x_1<x_2)$,且不等式$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{m}{x_1x_2}$恒成立,求实数$m$的取值范围.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=\ln x-x+2\sin x$,$f'(x)$为$f(x)$的导函数,求证:

(1)$f'(x)$在$(0,\pi)$上存在唯一零点;

(2)$f(x)$有且仅有两个不同的零点.