

饮生活之水 纳历史之光 达思维之根

——有理数加减法混合运算

郝四柱 (南京大学金陵初级中学 210000)



作者简介:郝四柱,江苏盱眙人,1988年8月毕业于淮阴师专(今淮安师范学院),并在江苏省盱眙县第三中学执教,后调至南大金陵初中(原南京金陵中学仙林分校中学部)至今.2014年被评为江苏省数学特级教师,2019年被评为正高级教师.在《数学通报》上发表5篇论文,被中国人民大学书报资料中心全文刊载3篇.在30多年的教学实践中,形成了“立足生活,寻求根源,形成体系”的最低发展区教学理念;建立了以思维建构和优化来统领知识教学、培养学生能力的教学策略;从核心价值观的角度出发,摸索出“提效率,减作业,强思维”的减负增效方法;提炼出基于“最低发展区”、拓展“最近发展区”、提升“最高发展力”的通透教育信念.

1 基本情况

(1) 授课对象

学生来源于正常学区的平行班.

(2) 教材分析

所用教材为苏科版义务教育教科书《数学》(七上),其中第二章为有理数的运算.有理数加减法混合运算是进入初中后的第一次综合运算.这是初中数学计算的开端,是形象思维向抽象思维的过渡阶段,需要透彻理解加减法公式的生活来源,准确灵活地使用公式,发展学生简单的推理能力和运算能力.

(3) 教学目标

1) 经历加减法的单个知识的生活理解,体验、感悟古代数学有理数加减的方式方法;2) 在相互交流中进一步加深对加减法的生活理解,形成解题方

法策略;3) 通过逆向思考,实现问题理解的可逆性,加减法运算之间的统一性.

(4) 教学重点

通过自主思考和合作讨论,反思对于加减法的理解,积累和形成加减法的通透理解.

(5) 教学难点

如何从生活角度进行数学思考和探究,降低思维抽象性,实现数学思维可视化.

2 教学过程

2.1 情境设置

同学们,在中国古代,没有绝对值、相反数、数轴等概念,那么人们如何理解有理数加减法呢?比如一个商铺,由于当时人员流动比较小,店家对于来来往往的顾客都熟悉.某些人由于经济条件和生活水

主题时,能够先采用脉络式阅读的方式,探寻理论和方法的发展轨迹.比如研究的变迁、研究与教学实践之间的关系变化、教育改革的不同时期、理论流派的变迁、定性和定量方法的发展、设计研究的演变等,尝试着根据文中内容梳理出每一个主题的历史发展和未来走向主线,然后再带着这条主线进入每一个节点的阅读.

其次,虽然每章都有一个主题,但是有些主题是有联系、有交叉的.我们希望读者能在比较中阅读,看到相关主题的联系和差别.比如最后三章的研究方法,虽然分别以定性研究、统计模型、设计研究为主题,但是如果能从比较的角度阅读,对于我们识别每一种研究方法的特征和了解它们的适用性都是有

帮助的.像文本分析,既可以用定性研究方法,也可以用定量方法,那么采用哪一种方法往往和我们研究的问题相关,需要根据研究问题和方法特性来选择合适的研究方法.

最后,正如本书第一章所言,在研究者的职业生涯中,从学生时期直至退休,一些问题会反复浮现:让某人成为一个成功的或一般的研究者的因素是什么?让一项研究得到认可、引用或应用的东西是什么?因此也建议读者时不时地读一读第一章,时不时地做一些这样的思考,或许能指引我们深入想一想可以提出什么样的研究问题,要回答该研究问题应该用什么样的研究方法、收集什么样的数据以及做什么样的分析,进而带来一些研究的新收获.

平的限制,往往会赊账,商铺就把这些账目记录下来,就是我们常说的流水账.

(1)某商铺的一个记账本上面有一些流水账(欠商铺的钱记为负,给商铺钱记为正,单位:元):钱某, $-4+4-5+5-3+3-7+5$.请你说说这里每一笔帐的含义.

(2)继续说出下列账面的含义: $-(+2)+(-2)-(-2)$.

• 片段 1
教师在第(1)问生活理解的基础上,追问:
师: $+(-2)$ 是什么意思?
生 1:给了 -2 元.
师:给 2 元好理解,给 -2 元是什么意思?
生 1:给 -2 元就是欠 2 元.
师:那结果就是?
生 1: $+(-2)=-2$.
师:很好!用相反意义来理解.那么 $-(-2)$ 又是什么意思?
生 2:欠了 -2 元.
师:欠了 2 元好理解,欠了 -2 元?
生 2:欠了 -2 元就是给商店 2 元.
师:那 $-(-2)$ 结果就是——
生 2: $-(-2)=2$.
师:嗯,那么对 $-(-2)=+2$ 还可以从什么角度去理解?大家讨论看看.
生 3:敌人的敌人是朋友.(有些争议声)
生 4:双重否定就是肯定.
师:你能举个例子吗?
生 4:你作业不是不会做,意思是应该会做.
师:不错.

2.2 问题解决

题号	记账单	合计	理解的方法
1	小王: $-3-2$		同号说明意义相同
2	小赵: $+3+2$		
3	小张: $-3+2$		异号说明意义相反
4	小李: $+3-2$		
5	小郑: $-2+3$		
6	小刘:	$-(4+1)$	
7	小陈:	$-(4-1)$	
8	小周:	$+(4-1-3+5)$	
9	小朱:	$-(4-1-3+5)$	
10	$-a-b$		
11		$-(a-b)$	
12	$b-a$		

• 片段 2
教师在第(1)问生活理解的基础上追问.
师:题 1 中, $-3-2$ 是什么意思?如何计算?
生 5:欠了 3 元,又欠了 2 元,一共欠 5 元,就是 -5 .
师:这两次账目是累加还是抵消?
生 5:累加.
生 6:一个人第一次欠 3 元,就是该给商店 3 元,第二次欠 2 元,就是该给商店 2 元,两次该给商店 5 元.而现在欠着,就是 -5 .
师:题 3 中, $-3+2$ 是什么意思?如何计算?
生 7:欠了 3 元,又还了 2 元,还欠 1 元.
师:这两次账目是累加还是抵消?
生 7:抵消.
师:是欠的多还是给的多?
生 7:欠的多,所以结果为负, $-3+2=-1$.

• 片段 3
师:题 6 中,结账时出现 $-(4+1)$,说明之前账目是什么情况?
生 8:说明第一次欠 4 元,第二次欠 1 元,两次是累加关系.
师:题 7 中,结账时出现 $-(4-1)$,说明之前账目是什么情况?
生 9:说明第一次欠 4 元,第二次想少欠 1 元,于是给商店 1 元.两次是抵消关系.
师: $-(4-1)=-4+1$.
生 10:括号外是负的,里面的意思就应该是反的.里面 4 得到 -4 ,里面 -1 得到 $+1$.
师:题 10 中,如果商铺主人记不住顾客的账目,只是记着 $-a-b$,累计的结果为——

生 11: $-(a+b)$.
师:题 11 中,合计的结果是 $-(a-b)$,说明之前的含义是——
生 12:先欠 a 元,后来给了 b 元.
师:题 12 中, $b-a$ 合计多少?
生 13: $+(b-a)$.
师:但是不知道欠的多还是给的多呀.请大家讨论一下.
生 14:还有可能是 $-(a-b)$.
师:因此 $b-a=+(b-a)=-(a-b)$.
例 2 张某经常在该商铺买东西,记账单上显示: $-2-3-4+6+7-3$.如果你是商铺老板,那么你能把这个账单合计一下算出结果吗?
(学生用凑 0 法、同号结合法等方法很快给解决了.)

例3 你能说出该商铺合计时出现的式子 $-1 - (2+3)$ 是什么含义吗? 请你把帐算清.

例4 你能说出该商铺合计时出现的式子 $-1 - (3-2)$ 是什么含义吗? 请你把帐结清.

例5 你能说出该商铺合计时出现的式子 $+(+3)+(-4)-(+2)-(-5)$ 是什么含义吗? 请你把帐结清.

(以上例题2~5, 学生通过正负数的含义都能很快解决.)

• 片段4

例6 计算: $(2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + \cdots + 50 \times 50) - (3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + \cdots + 50 \times 49)$.

师: 例6怎么解? 括号内的计算看上去很麻烦.

生15: 先去括号, 然后用加法交换律、结合律.

(教师根据学生思路板书)

原式 $= 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + \cdots + 50 \times 50 - 3 \times 2 - 4 \times 3 - 5 \times 4 - \cdots - 50 \times 49$

$= 2 \times 2 + (3 \times 3 - 3 \times 2) + (4 \times 4 - 4 \times 3) + (5 \times 5 - 5 \times 4) + \cdots + (50 \times 50 - 50 \times 49)$

$= 4 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 50$

$= 4 + \frac{48 \times (3+50)}{2}$

$= 1\,276$.

2.3 总结

今天同学们理解得非常好, 这种相抵与累加的算法是我们老祖宗很久以前就掌握的. 对于历史文化遗产, 我们要好好地珍惜、好好地挖掘. 大家不仅学会了有理数加减法混合运算, 而且顺利地解决了去括号、添括号的问题, 同学们太棒了!

3 总结与反思

(1) 案例设计的灵感来源

在教学中, 有不少学生根本不用有理数加减法法则就能够算出结果, 而有的基础薄弱的学生用了课本加减法法则绕了一大圈之后还一头雾水, 以至于出现 $-1 - 1 = 0$ 或 1 或 2 这类奇怪的结果. 教师给他们纠错的时候说: 这个式子就是问“比 -1 少 1 的数是多少?” 他们能够得出 -2 ; 或者问“欠 1 块钱, 然后又欠 1 块钱, 一共是多少?” 学生立刻能够理解. 这些问题的纠错让我们知道, 法则的应用不是唯一的途径, 这些在生活中比比皆是例子, 具有问题直接、转化简洁、解法快捷的特点, 我们可以也应该从容易的角度入手, 让更多的学生跨进数学大门. 这就是我们提出的“最低发展区”思想.

(2) 什么是“最低发展区”

“最低发展区”不仅包含数学的最基本知识、方法, 还包括数学教学时采用的是动手操作以及讨论、讲授等方式, 更为关键的还有学生的生活背景和基本能力, 年龄段特有的兴趣、心理等. 教学过程中让数学在生活逻辑、历史渊源、创新思考等情境下展开, 进行知识的逻辑生长, 从而改变课本原有的知识结构体系, 减轻抽象的思维跨度, 连接实实在在的生活逻辑, 从而加固课本知识的逻辑韧带, 增加相关知识链接的角度、方法, 让数学内涵和底蕴更加厚实, 让数学更加好玩.

(3) 教学“最低发展区”的可能性

数学的发展源远流长, 其中许多内容背后都有着一定的故事, 而故事背后一定存在着一个认知的原始出发点, 那么这个出发点就是思考这一类问题的根.

对于正负数加减运算, 民间老百姓都能很好地理解, 说明这具有强大的生活基础. 中国古代数学名著《九章算术》里的“正负术”就有这类具体描述: “正负术曰: 同名相益(意思为累加), 异名相除(意思为抵消).”这正是本文中数学加减法的一种本源方法.

总之, 初中数学不是空中楼阁, 而是来源于生活经验和历史积淀. 同样的, 学生的数学知识和思维方法、路径总是有最基本的生活背景为依托, 因此学生的学习总是存在着一种近乎源头的那个出发点. 这就为数学教学时提炼和建构“最低发展区”提供了可能.

(4) “最低发展区”的必要性

初中学生正处于从形象思维向抽象思维不断提升的过程, 学习的发展必须打好基础. 当然这个基础不仅仅是知识, 更在于知识产生的土壤、学生知识发展的逻辑能力、学生的兴趣爱好、认知的通透程度等. 学生对于数学的认知尽可能地变得纯粹并变成喜好, 才能让数学真正变成学生自己的数学, 而不是老师的数学. “最低发展区”认知需要我们的深刻反思: 学生的发展根基越广泛、越牢固、越基本, 那么其后续的发展就越有动力、能力和认知力, 这就是基于“最低发展区”、拓展“最近发展区”、提升“最高发展力”的通透教育信念. 那种在基础不足情况下的高度提升, 会导致数学学习的大厦随时出现危机, 甚至倒塌. 让我们的数学教学下接地气, 上达天庭, 上下通透, 蕴含灵气吧!