

§ 2.8 函数模型及其应用

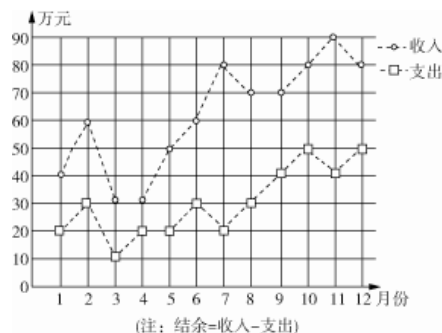
复习目标

1. 了解指数函数、对数函数、幂函数的增长特征, 结合具体实例体会直线上升、指数增长、对数增长等不同函数类型增长的含义.
2. 了解函数模型(如指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等在社会生活中普遍使用的函数模型)的广泛应用.

课前热身

1. 某工厂一年中各月份的收入、支出情况的统计图如图所示, 则下列说法中错误的是()

- A. 收入最高值与收入最低值的比是 3:1
- B. 结余最高的月份是 7 月
- C. 1 至 2 月份的收入的变化率与 4 至 5 月份的收入的变化率相同
- D. 前 6 个月的平均收入为 40 万元



2. 在某个物理实验中, 测量得变量 x 和变量 y 的几组数据, 如下表:

x	0.50	0.99	2.01	3.98
y	-0.99	0.01	0.98	2.00

则对 x, y 最适合的拟合函数是()

- A. $y=2x$
- B. $y=x^2-1$
- C. $y=2x-2$
- D. $y=\log_2 x$

3. 某种动物繁殖量 y 只与时间 x 年的关系为 $y=a\log_3(x+1)$, 设这种动物第 2 年有 100 只, 到第 8 年它们将发展到()

- A. 200 只
- B. 300 只
- C. 400 只
- D. 500 只

4. Logistic 模型是常用数学模型之一, 可应用于流行病学领域. 有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$ (t 的单位: 天) 的 Logistic 模型: $I(t)=\frac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}$, 其中 K 为最大确诊病例数.

当 $I(t^*)=0.95K$ 时, 标志着已初步遏制疫情, 则 t^* 约为 $(\ln 19 \approx 3)$ ()

- A. 60
- B. 63
- C. 66
- D. 69

5. 当生物死亡后, 其体内原有的碳 14 的含量大约每经过 5 730 年衰减为原来的一半, 这个时间称为“半衰期”. 当死亡生物体内的碳 14 含量不足死亡前的千分之一时, 用一般的放射性探测器就测不到了. 若某死亡生物体内的碳 14 用该放射性探测器探测不到, 则它经过的“半衰期”个数至少是()

- A. 8
- B. 9
- C. 10
- D. 11

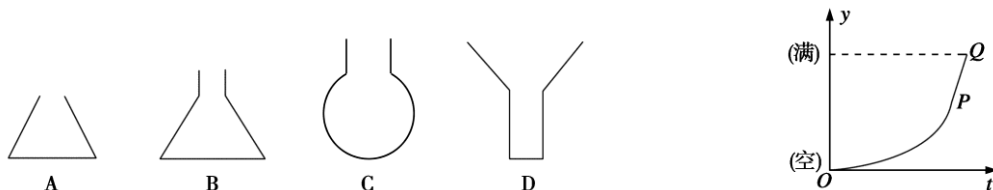
6. 生产一定数量商品的全部费用称为生产成本. 某企业一个月生产某种商品 x 万件的生产成本为 $C(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+20$ (万元). 一万件售价为 20 万元, 为获取更大利润, 该企业一个月应生产该商品数量为_____万件.

知识梳理

典例研究

考点一 利用函数图象刻画实际问题的变化过程

例 1. 有一个盛水的容器, 由悬在它的上空的一条水管均匀地注水, 最后把容器注满, 在注水过程中时间 t 与水面高度 y 之间的关系如图所示. 若图中 PQ 为一线段, 则与之对应的容器的形状是()



考点二 已知函数模型解决实际问题

例 2. 已知 ^{14}C 的半衰期为 5 730 年(是指经过 5 730 年后, ^{14}C 的残余量占原始量的一半). 设 ^{14}C 的原始量为 a , 经过 x 年后的残余量为 b , 残余量 b 与原始量 a 的关系为 $b = ae^{-kx}$, 其中 x 表示经过的时间, k 为一个常数. 现测得湖南长沙马王堆汉墓女尸出土时 ^{14}C 的残余量约占原始量的 76.7%. 请你推断一下马王堆汉墓修建距今约 _____ 年. (参考数据: $\log_2 0.767 \approx -0.4$).

考点三 构建函数模型解决实际问题

例 3. 某校学生研究学习小组发现, 学生上课的注意力指标随着听课时间的变化而变化, 老师讲课开始时, 学生的兴趣激增; 接下来学生的兴趣将保持较理想的状态一段时间, 随后学生的注意力开始分散, 设 $f(t)$ 表示学生注意力指标. 该小组发现 $f(t)$ 随时间 t (分钟) 的变化规律($f(t)$ 越大, 表明学生的注意力越集

$$\text{中)如下: } f(t) = \begin{cases} 100a^{\frac{t}{10}} - 60 & (0 \leq t \leq 10), \\ 340 & (10 < t \leq 20), \\ -15t + 640 & (20 < t \leq 40) \end{cases} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1).$$

若上课后第 5 分钟时的注意力指标为 140,

回答下列问题:

- (1) 求 a 的值;
- (2) 上课后第 5 分钟和下课前第 5 分钟比较, 哪个时间注意力更集中? 并请说明理由;
- (3) 在一节课中, 学生的注意力指标至少达到 140 的时间能保持多长?

例 4. 候鸟每年都要随季节的变化进行大规模的迁徙, 研究某种鸟类的专家发现, 该种鸟类的飞行速度 v (单位: m/s) 与其耗氧量 Q 之间的关系为: $v = a + b \log_3 \frac{Q}{10}$ (其中 a, b 是实数). 据统计, 该种鸟类在静止的时候其耗氧量为 30 个单位, 而其耗氧量为 90 个单位时, 其飞行速度为 1 m/s.

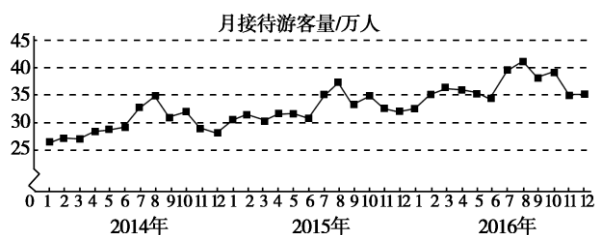
- (1) 求出 a, b 的值;
- (2) 若这种鸟类为赶路程, 飞行的速度不能低于 2 m/s, 则其耗氧量至少要多少个单位?

课堂小结

跟踪反馈

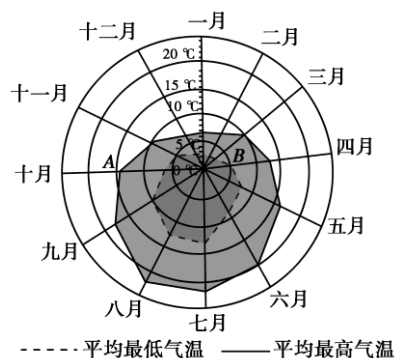
1. 某城市为了解游客人数的变化规律,提高旅游服务质量,收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量(单位:万人)的数据,绘制了下面的折线图.根据该折线图,下列结论错误的是()

- A. 月接待游客量逐月增加
B. 年接待游客量逐年增加
C. 各年的月接待游客量高峰期大致在 7, 8 月
D. 各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月,波动性更小,变化比较平稳



2. (多选题) 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况,绘制了一年中各月平均最高气温和平均最低气温的雷达图.图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 15°C , B 点表示四月的平均最低气温约为 5°C . 下面叙述正确的是()

- A. 各月的平均最低气温都在 0°C 以上
B. 七月的平均温差比一月的平均温差大
C. 三月和十一月的平均最高气温基本相同
D. 平均最高气温高于 20°C 的月份有 5 个



3. 某公司为了业务发展,制定了一项激励销售人员的奖励方案:销售额为 8 万元时,奖励 1 万元;销售额为 64 万元时,奖励 4 万元,若公司拟定的奖励模型为 $y = a \log_4 x + b$ (其中 x 为销售额, y 为相应的奖金).某业务员要得到 8 万元奖励,则他的销售额应为_____万元.
4. 某村计划建造一个室内面积为 800 m^2 的矩形蔬菜温室、在矩形温室内,沿左、右两侧与后侧内墙各保留 1 m 宽的通道,沿前侧内墙保留 3 m 宽的空地.当矩形温室的边长各为_____m, _____m 时,蔬菜的种植面积最大? 最大面积是_____ m^2 .
5. 一个容器装有细沙 $a \text{ cm}^3$,细沙从容器底部一个细微的小孔慢慢地匀速漏出, $t \text{ min}$ 后剩余的细沙量为 $y = ae^{-bt} (\text{cm}^3)$,经过 8 min 后发现容器内还有一半的沙子,则再经过_____min,容器中的沙子只有开

始时的八分之一.

6. 《步步高》P44 例 1

纠错补偿

1. 订正: 题号

2. 补偿训练: