江苏省仪征中学2019-2020学年第一学期高三数学
中档大题训练（8）　　11.22

班级 ______________　　　　姓名______________

1．在△ABC中，角A，B，C所对的边为a，b，c，已知$2b\cos A=2c-\sqrt{3}a$．

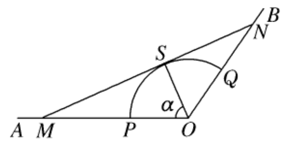
（1）求B；

（2）设函数$f(x)=\cos x\cdot\sin(x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{4}$，求$f(A)$的最大值．

2．如图，射线 OA 和 OB 均为笔直的公路，扇形 OPQ 区域(含边界)是一蔬菜种植园，其中 P，Q 分别在射线 OA 和 OB 上．经测量得，扇形 OPQ 的圆心角(即$\angle POQ$)为$\dfrac{2\pi}{3}$、半径为 1 千米，为了方便菜农经营，打算在扇形 OPQ 区域外修建一条公路 MN，分别与射线 OA，OB 交于 M，N 两点，并要求 MN 与扇形弧 $\overline{PQ}$ 相切于点 S.设$\angle POS=\alpha$(单位：弧度)，假设所有公路的宽度均忽略不计．

(1) 试将公路 MN 的长度表示为 α 的函数，并写出 α 的取值范围；

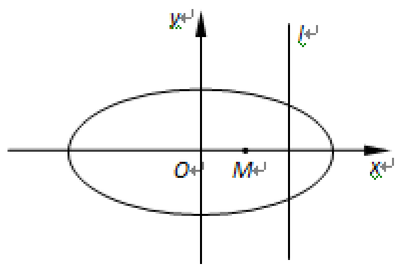
(2) 试确定 α 的值，使得公路 MN 的长度最小，并求出其最小值．



3．在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且直线 l：$x=2$ 被椭圆 E 截得的弦长为 2．与坐标轴不垂直的直线交椭圆 E 于 P，Q 两点，且 PQ 的中点 R 在直线 l 上．点 $M(1，0)$．

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）求证：$MR\perp PQ$．

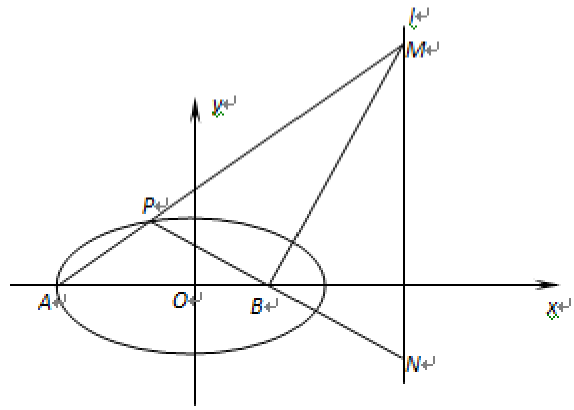


4．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C：\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点$(1，\frac{\sqrt{3}}{2})$．过椭圆 C 的左顶点 A 作直线交椭圆 C 于另一点 P，交直线

$l：x=m(m>a)$于点 M．已知点 $B(1，0)$，直线 PB 交 l 于点 N．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若 MB 是线段 PN 的垂直平分线，求实数 m 的值．



(第 18 题）

江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学
中档大题训练（8）答案　11.22

1、解：（1）在$\triangle ABC$中，因为$2b\cos A=2c-\sqrt{3}a$，

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以$2\sin B\cos A=2\sin C-\sqrt{3}\sin A$．

又因为$\triangle ABC$中，$\sin C=\sin(A+B)$，

所以$2\sin B\cos A=2\sin(A+B)-\sqrt{3}\sin A$，

即$2\sin B\cos A=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B-\sqrt{3}\sin A$，

所以$\sqrt{3}\sin A=2\cos B\sin A$，

又因为$\triangle ABC$中，$\sin A\neq 0$，所以$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

又因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{6}$．

（不说明$\sin A\neq 0$，扣1分）

（2）$f(x)=\cos x\cdot(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$=\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}(\cos 2x+1)-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})．$$

所以$f(A)=\frac{1}{2}\sin(2A+\frac{\pi}{3})$，

因为在$\triangle ABC$中，$B=\frac{\pi}{6}$，且$A+B+C=\pi$，所以$A\in(0,\frac{5}{6}\pi)$，

所以$2A+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},2\pi)$，所以当$2A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，

即$A=\frac{\pi}{12}$时，$f(A)$的最大值为$\frac{1}{2}$．

2、解：(1) 因为 MN 与扇形弧 $\overline{PQ}$ 相切于点 S,

所以 $OS\perp MN$.

在 Rt△OSM 中，因为 $OS=1$，$\angle MOS=\alpha$，

所以 $SM=\tan\alpha$.

在 Rt△OSN 中，$\angle NOS=\frac{2\pi}{3}-\alpha$，

所以 $SN=\tan\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$，

所以 $MN=\tan\alpha+\tan\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}(\tan^2\alpha+1)}{\sqrt{3}\tan\alpha-1}$，

其中$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

(2)因为$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，

所以$\sqrt{3}\tan\alpha-1>0$.

令 $t=\sqrt{3}\tan\alpha-1>0$，则 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}(t+1)$，

所以 $MN=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(t+\frac{4}{t}+2\right)$.

由基本不等式得 $MN\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(2\sqrt{t\times\frac{4}{t}}+2\right)=2\sqrt{3}$，

当且仅当 $t=\frac{4}{t}$，即 $t=2$ 时取“＝”.

此时 $\tan\alpha=\sqrt{3}$，由于$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，故 $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

答：当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$时，MN 的长度最小，为 $2\sqrt{3}$千米.

3、**解**：（1）因为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，即 $a^2=2b^2$． …………………… 2分

因为直线 l：$x=2$ 被椭圆 E 截得的弦长为 2，

所以点(2，1)在椭圆上，即 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$．

解得 $a^2=6$，$b^2=3$，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$． 6分

（2）因为直线 PQ 与坐标轴不垂直，故设 PQ 所在直线的方程为 $y=kx+m$．

设 $P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$．

因为 PQ 的中点 R 在直线 l：$x=2$ 上，故 $R(2，2k+m)$．

联立方程组 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$

消去 y，并化简得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$， 9分

所以 $x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}$．　　（*）

由 $x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}=4$，得 $1+2k^2=-km$．　①　..................... 12分

因为 $M(1，0)$，故 $k_{MR}=\frac{2k+m}{2-1}=2k+m$，

所以 $k_{MR}\cdot k_{PQ}=(2k+m)k=2k^2+km=2k^2-(1+2k^2)=-1$，

所以 $MR\perp PQ$． 16分

4、解：（1）因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $a^2=4b^2$．　…………………………2分

又因为椭圆 C 过点 $(1，\frac{\sqrt{3}}{2})$，所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{\frac{3}{4}}{b^2}=1$，　…………………………3分

解得 $a^2=4$，$b^2=1$．

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$． ………………………5 分

（2）解法 1

设 $P(x_0, y_0)$，$-2<x_0<2$，$x_0\neq 1$，则$\frac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1$．

因为 MB 是 PN 的垂直平分线，所以 P 关于 B 的对称点 $N(2-x_0, -y_0)$，

所以 $2-x_0=m$． ………………………7 分

由 $A(-2, 0)$，$P(x_0, y_0)$，可得直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，

令 $x=m$，得 $y=\frac{y_0(m+2)}{x_0+2}$，即 $M(m, \frac{y_0(m+2)}{x_0+2})$．

因为 $PB\perp MB$，所以 $k_{PB}\cdot k_{MB}=-1$，

所以 $k_{PB}\cdot k_{MB}=\frac{y_0}{x_0-1}\cdot\frac{\frac{y_0(m+2)}{x_0+2}}{m-1}=-1$， ………………………10 分

即$\frac{y_0^{\ 2}(m+2)}{(x_0-1)(x_0+2)(m-1)}=-1$．

因为$\frac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1$．所以$\frac{(x_0-2)(m+2)}{4(x_0-1)(m-1)}=1$． ………………………12 分

因为 $x_0=2-m$，所以化简得 $3m^2-10m+4=0$，

解得 $m=\frac{5\pm\sqrt{13}}{3}$． ………………………15 分