

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度高三数学寒假自主练习 (7)

命题人：高三数学组 校对：高三数学组

一、选择题：本小题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

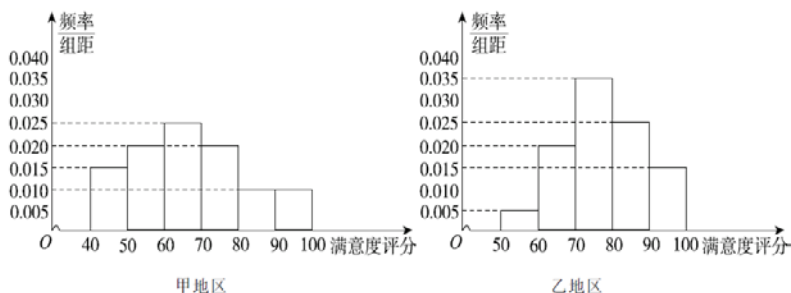
1. 设集合 $A = \{x | x^2 \leq 4\}$, $B = \{x | |x| > 1\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $\{x | 1 < x \leq 2\}$ B. $\{x | -2 < x < -1 \text{ 或 } 1 < x < 2\}$
C. $\{x | -2 \leq x < -1\}$ D. $\{x | -2 \leq x < -1 \text{ 或 } 1 < x \leq 2\}$

2. 复数 z 满足: $z(1+i) = 1-i$, 则 z 的虚部等于 $(\quad)$

- A. $-i$ B. -1 C. 0 D. 1

3. 某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从甲、乙两地区分别随机调查了 100 个用户, 根据用户对产品的满意度评分, 分别得到甲地区和乙地区用户满意度评分的频率分布直方图.



若甲地区和乙地区用户满意度评分的中位数分别为 m_1 , m_2 ; 标准差分别为 s_1 , s_2 , 则

下面正确的是 $(\quad)$

- A. $m_1 > m_2$, $s_1 > s_2$ B. $m_1 > m_2$, $s_1 < s_2$
C. $m_1 < m_2$, $s_1 < s_2$ D. $m_1 < m_2$, $s_1 > s_2$

4. 设 $a = 5^{0.4}$, $b = \log_{0.4} 0.5$, $c = \log_5 0.4$, 则 a, b, c 的大小关系是 $(\quad)$

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

5. 已知 α 是第二象限角, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 则 $\sin 2\alpha = (\quad)$

- A. $-\frac{24}{25}$ B. $\frac{24}{25}$ C. $-\frac{12}{25}$ D. $\frac{12}{25}$

6. 四个人排一个五天的值班表, 每天一人值班, 并且每个人至少值班一次, 则有 $(\quad)$ 种不同的排班方式.

- A. 240 B. 480 C. 420 D. 360

7. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 过焦点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 P 、 Q 两点, 交 y 轴于点 A , 若点 P 为线段 FA 的中点, 且 $|FQ| = 2$, 则 p 的值为()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. 3

8. 在底面边长为 1 的正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱长等于 2, 则 ()

- A. 在正四棱柱的棱上到异面直线 A_1B 和 C_1C 距离相等的点有且只有一个
B. 在正四棱柱的棱上到异面直线 A_1B 和 C_1C 距离相等的点有且只有两个
C. 在正四棱柱的棱上到异面直线 A_1B 和 C_1C 距离相等的点有且只有三个
D. 在正四棱柱的棱上到异面直线 A_1B 和 C_1C 距离相等的点有且只有四个

二、选择题: 本小题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对得 2 分.

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公比 $q > 1$, $n \in N_+$, 则 ()

- A. $\{a_n\}$ 一定是递增数列 B. $\{a_n\}$ 可能是递增数列也可能是递减数列
C. a_3 、 a_7 、 a_{11} 仍成等比 D. $\forall n \in N_+, S_n \neq 0$

10. 定义在实数集 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = -f(1-x)$, 且 $x \geq 1$ 时函数 $f(x)$ 单调递增则 ()

- A. $f(1) = 0$ B. $f(x)$ 是周期函数
C. 方程 $f(x) = 0$ 有唯一实数解 D. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调递减

11. 为了得到 $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图像只需把函数 $y = 2\cos(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图像 ()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ B. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$
C. 关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 轴对称 D. 关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 轴对称

12. 方程 $e^x + x - 2 = 0$ 的根为 x_1 , $\ln x + x - 2 = 0$ 的根为 x_2 , 则 ()

- A. $\frac{x_1}{x_2} > \frac{1}{2}$ B. $x_1 \ln x_2 + x_2 \ln x_1 < 0$
C. $e^{x_1} + e^{x_2} < 2e$ D. $x_1 x_2 < \frac{\sqrt{e}}{2}$

三、填空题：本小题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的左、右焦点，则 $|F_1F_2| =$ _____

14. 已知正实数 a, b 满足 $a + 2b = 1$ ，则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 _____

15. 某校为了丰富学生的课余生活，组建了足球、篮球、排球、羽毛球四个兴趣小组，要求每一名学生选择其中的两个小组参加. 现有 A, B, C, D 四位同学，已知 A 与 B 没有选择相同的兴趣小组， C 与 D 没有选择相同的兴趣小组， B 与 C 选择的兴趣小组恰有一个相同，且 B 选择了足球兴趣小组. 给出如下四个判断：

① C 可能没有选择足球兴趣小组；② A, D 选择的两个兴趣小组可能都相同；

③ D 可能没有选择篮球兴趣小组；④ 这四人中恰有两人选择足球兴趣小组；

其中正确判断是 _____

16. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是平面向量， $\vec{a}, \vec{c}$ 是单位向量，且 $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \frac{\pi}{3}$ ，若 $\vec{b}^2 - 9\vec{b} \cdot \vec{c} + 20 = 0$ ，则

$|2\vec{a} - \vec{b}|$ 最大值是 _____

四、解答题：本题共 6 道小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在① $ac = 4\sqrt{7}$ ② $\sin B = 2 \sin A$ ③ $c \sin A = \sqrt{3}$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，若问题中的三角形存在，求 c 值；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题：是否存在 $\triangle ABC$ ，它的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $b \cos A + a \cos B + 2c \cos C = 0$ ， $\triangle ABC$ 的面积是 $2\sqrt{3}$ ，_____？

18. (本小题满分 12 分)

某公司在联欢活动中设计了一个摸奖游戏，在一个口袋中装有 3 个红球和 4 个白球，这些球除颜色外完全相同. 游戏参与者可以选择有放回或者不放回的方式从中依次随机摸出 3 个球，规定至少摸到两个红球为中奖. 现有一位员工参加此摸奖游戏.

(1) 如果该员工选择有放回的方式（即每摸出一球记录后将球放回袋中再摸下一个）摸球，求他能中奖的概率；

(2) 如果该员工选择不放回的方式摸球，设在他摸出的 3 个球中红球的个数为 X ，求 X 的分布列和数学期望；

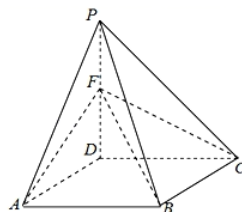
(3) 该员工选择哪种方式摸球中奖的可能性更大？请说明理由.

19. (本小题满分 12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是菱形, $PD = AD = 4$, $\angle BAD = 60^\circ$, 点 F 在棱 PD 上.

(1) 若 $PF = \frac{1}{2}PD$, 在棱 BC 上是否存在一点 E , 使得 $CF \parallel$ 平面 PAE , 并说明理由;

(2) 若直线 AF 与平面 BCF 所成的角的正弦值是 $\frac{\sqrt{15}}{10}$, 求二面角 $A-FB-C$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 3$, $S_n = a_{n+1} - 1$, 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, $a_2 = b_4$, 且 $b_2 + b_5 = b_7$,

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

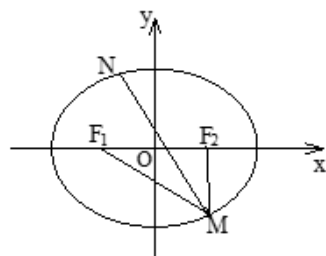
(II) 若 $c_n = \frac{a_n b_n}{(n+2)b_{n+1}}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 Γ 中心在坐标原点, 焦点 F_1, F_2 在 x 轴上, 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 经过点 $M(c, -3)$ (c 为椭圆的半焦距).

(1) 求椭圆 Γ 的标准方程;

(2) $\angle F_1 M F_2$ 的平分线 l 与椭圆的另一个交点为 N , O 为坐标原点, 求直线 OM 与直线 ON 斜率的比值.



22. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = (1+ax)e^{-2x}$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = -x + 1$.

(1) 求实数 a 的值.

(2) 求证: 当 $x \in [0, 1]$ 时, $2f(x) - 2 \geq x(x^2 + 4\cos x - 6)$.