江苏省仪征中学 2017-2018 学年度第二学期 4 月月考试卷

高二理科数学

考试内容：复数、推理证明、数学归纳法、空间向量、集合与逻辑

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分。请把答案填写在答题卡相应的位置上.

1、已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{-2,0,2,4\}$，则 $A\cap B=$____▲____.

2、已知 $\dfrac{a+2i}{i}=b+i\left(a,b\in R\right)$，其中 i 为虚数单位，则 $a+b=$____▲____.

3、写出命题"$\exists x\in \mathbf{R}$，使得 $x^2<0$"的否定：____▲____.

4、"$x>1$"是"$x^2>x$"成立的___▲___条件.

（填"充分不必要""必要不充分""充要"或"既不充分也不必要"）

5、已知向量 $\vec{a}=(-4,2,4),\vec{b}=(-6,3,-2)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值为____▲____.

6、设复数 z 满足 $z\cdot i=-1+5i$（i 为虚数单位），则复数 z 在复平面内所表示的点位于第___▲___象限.

7、已知函数 $f(x)=2^{x^2+1}(x\in R)$，且对于任意的 x 恒有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，则 $x_0=$____▲____.

8、用数学归纳法证明等式 $1+2+3+\cdots+(n+3)=\dfrac{(n+3)(n+4)}{2}(n\in \mathbf{N}^*)$ 时，

第一步验证 $n=1$ 时，左边应取的项是____▲____.

9、若空间直角坐标系中点 $A\left(2,-5,-1\right),B\left(-1,-4,-2\right),C(m+3,-3,n)$ 在同一条直线上，

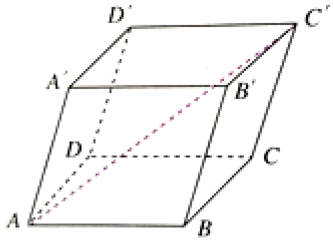
则 $m+n=$__________.

10、已知 $\sqrt{2+\dfrac{2}{3}}=2\sqrt{\dfrac{2}{3}},\sqrt{3+\dfrac{3}{8}}=3\sqrt{\dfrac{3}{8}},\sqrt{4+\dfrac{4}{15}}=4\sqrt{\dfrac{4}{15}}$，…，若 $\sqrt{6+\dfrac{a}{t}}=6\sqrt{\dfrac{a}{t}}$，（$a,t$ 均为正实数），

则**类比**以上等式，可推测 a,t 的值，$a+t=$___▲___.

11、 如图，平行六面体$ABCD-A'B'C'D'$中，$AB=AD=1, AA'=2, \angle BAD=\angle BAA'=\angle DAA'=60°$，

则AC'的长为____▲____.



12、在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形， $PA\perp$平面$ABCD$， $AB=2$， $AD=\sqrt{3}$，

$\angle BAD=120^0$， $PA=x$，则当x变化时，直线PD与平面PBC所成角的取值范围是____▲____.

13．请阅读下列材料：若两个正实数a_1, a_2满足$a_1{}^2+a_2{}^2=1$，那么$a_1+a_2\leqslant\sqrt{2}$.
证明：构造函数$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2=2x^2-2(a_1+a_2)x+1$，因为对一切实数$x$，
恒有$f(x)\geqslant 0$，所以△≤0，从而得$4(a_1+a_2)^2-8\leqslant 0$，所以$a_1+a_2\leqslant\sqrt{2}$. 根据上述证明方法，若$n$个正实数满足$a_1^2+a_2^2+a_3^2+......+a_n^2=1$时，你能得到的结论为____▲____.

14、如图所示三角形数阵中，a_{ij}为第i行第j个数，若$a_{mn}=2017$，则实数对$(m，n)$为____▲____.

1
2 4
5 7 9
10 12 14 16
17 19 21 23 25
26 28 30 32 34 36
… … … … … … … … … … …

二、解答题：（本大题共 6 小题, 共 90 分．解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤．）

15、（本题满分 14 分）

已知 z 是复数，若 $z+i$ 为实数， $z-2$ 为纯虚数．

（1）求复数 z；　　　　（2）求 $\left|\dfrac{z^2-z}{1+i}\right|$．

16、（本题满分 14 分）

已知命题 p：函数 $f(x)=-x^2+4ax+3$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上是单调增函数；

命题 q：函数 $g(x)=\lg(x^2+2ax+a)$ 的定义域为 R，

如果命题“ p 或 q ”为真，“ p 且 q ”为假，求实数 a 的取值范围．

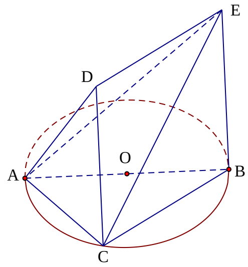
17. （本题满分 14 分）

（1）求证：当 $a>2$ 时，$\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}<2\sqrt{a}$；

（2）证明：2，$\sqrt{3}$，5 不可能是同一个等差数列中的三项．

18、（本题满分 16 分）

如图，一简单几何体 $ABCDE$ 的一个面 ABC 内接于圆 O, AB 是圆 O 的直径，四边形 $DCBE$ 为平行四边形，且 $DC\perp$ 平面 ABC. 若 $AC=BC=BE=2$,



（1）BE 边上是否存在一点 M，使得 AD 和 CM 的夹角为 60°？

（2）求锐角二面角 $O\text{-}CE\text{-}B$ 的余弦值.

19、（本题满分 16 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{n}$， $f(n)=\begin{cases} S_{2n} & ,n=1 \\ S_{2n}-S_{n-1} & ,n\geq 2 \end{cases}$.

（1）计算 $f(1), f(2), f(3)$ 的值；

（2）比较 $f(n)$ 与 1 的大小，并用数学归纳法证明你的结论.

20、（本题满分 16 分）

给出四个等式：

$1=1$

$1-4=-(1+2)$

$1-4+9=1+2+3$

$1-4+9-16=-(1+2+3+4)$

…

（1）写出第 5，6 个等式，并猜测第 $n(n\in N^*)$ 个等式；

（2）用数学归纳法证明你猜测的等式.

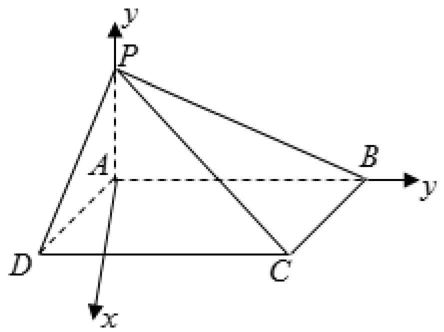
江苏省仪征中学2017-2018学年度第二学期4月月考试卷

高二理科数学试题参考答案

1、{0，2}　　2、1　　3、$\forall x\in\mathbf{R}$， $x^2\geqslant 0$　　4、充分不必要　　5、$\dfrac{11}{21}$

6、一　　7、0　　8、1+2+3+4　　9、-10　　10、11

11、$\sqrt{11}$　　12、$\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$　　13、$a_1+a_2+\cdots+a_n\le\sqrt{n}$　　14、(45，41)



【12题解析】

如图建立空间直角坐标系，得 $B(0,2,0),C\left(\dfrac{3}{2},2-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right),D\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right),P(0,0,x)$

设平面 PBC 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$， $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right),\overrightarrow{PB}=(0,2,-x)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$ ，得 $\vec{m}=\left(1,\sqrt{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{x}\right)$，

又 $\overrightarrow{PD}=\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-x\right)$

所以 $\cos\overrightarrow{PD},\vec{m}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{4+\dfrac{12}{x^2}}\cdot\sqrt{3+x^2}}$，

所以 $\sin\theta=\left|\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{4+\dfrac{12}{x^2}}\cdot\sqrt{3+x^2}}\right|=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{36}{x^2}+4x^2+24}}$，

所以 $\sin\theta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，则 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$

15．(1)设 $z = x + yi(x, y \in \mathbf{R})$ ······························1 分

因为 $z + i = x + (y+1)i$ 为实数，所以 $y+1=0$，所以 $y=-1$， ··················3 分

又因为 $z-2=(x-2)-i$ 为纯虚数，所以 $x-2=0$，所以 $x=2$， ··············· 6 分

所以 $z = 2 - i$ ， ··············· 7 分

(2)因为 $\frac{z^2 - z}{1+i} = \frac{(3-4i)-(2-i)}{1+i} = \frac{(1-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -1-2i$， ··············· 11 分

所以 $\left|\frac{z^2-z}{1+i}\right| = |-1-2i| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$. ··············· 14 分

16．因为函数 $f(x) = -x^2 + 4ax + 3$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上是单调增函数,

所以对称轴方程 $x = -\frac{4a}{2\times(-1)} \geqslant 1$，所以 $a \geqslant \frac{1}{2}$， ··························3 分

又因为函数 $g(x) = \lg(x^2 + 2ax + a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

所以 $\Delta = (2a)^2 - 4a < 0$，解得 $0 < a < 1$， ······························6 分

又因为“p 或 q”为真，“p 且 q”为假，所以命题 p, q 一真一假， ···············8 分

所以 $\begin{cases} a \leqslant 0 或 a \geqslant 1 \\ a \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ a < \frac{1}{2} \end{cases}$， ···············12 分

所以 $a \geqslant 1$ 或 $0 < a < \frac{1}{2}$，

所以实数 a 的取值范围是 $\left\{a \,\middle|\, 0 < a < \frac{1}{2}, 或 a \geqslant 1\right\}$. ···············14 分

17．解：(1) $\because (\sqrt{a+2} + \sqrt{a-2})^2 = 2a + 2\sqrt{a+2}\cdot\sqrt{a-2}$，$\sqrt{a+2} > 0$，$\sqrt{a-2} > 0$

且 $a+2 \neq a-2$，$\therefore 2a + \sqrt{a+2} + \sqrt{a-2} < 2a + (a+2) + (a-2) = 4a$,

$\therefore \sqrt{a+2} + \sqrt{a-2} < 2\sqrt{a}$----------(7分)

（2）假设2，$\sqrt{3}$，5是同一个等差数列中的三项，分别设为a_m，a_n，a_p,

则$d = \frac{a_m - a_n}{m-n} = \frac{2-\sqrt{3}}{m-n}$为无理数，又$d = \frac{a_m - a_p}{m-p} = \frac{2-5}{m-p} = \frac{-3}{m-p}$为有理数，矛盾.

所以，假设不成立，即2，$\sqrt{3}$，5不可能是同一个等差数列中的三项.-------(14分)

【解析】(1)利用综合法证明即可；

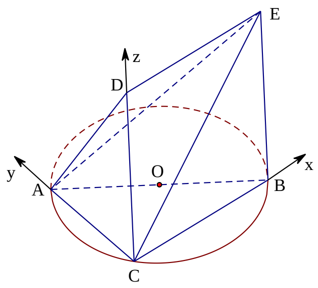
(2)利用反证法证明，假设2，$\sqrt{3}$，5是同一个等差数列中的三项，分别设为a_m，a_n，a_p，推出$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}=\frac{2-\sqrt{3}}{m-n}$为无理数，又$d=\frac{a_m-a_p}{m-p}=\frac{2-5}{m-p}=\frac{-3}{m-p}$为有理数，矛盾，即可证明不可能是等差数列中的三项.

反证法是属于“间接证明法”一类，是从反面的角度思考问题的证明方法，即：肯定题设而否定结论，从而导出矛盾推理而得.应用反证法证明的具体步骤是：①反设：作出与求证结论相反的假设；②归谬：将反设作为条件，并由此通过一系列的正确推理导出矛盾；③结论：说明反设成立，从而肯定原命题成立.

18. （1）因为，AB 是圆 O 的直径，所以，$AC\perp CB$

以 C 为原点，CB 为 x 轴正方向，CA 为 y 轴正方向，CD 为 z 轴正方向，

建立如图所示的直角坐标系



因为，$AC=BC=BE=2$,

所以，C(0,0,0),B(2,0,0),A(0,2,0),O(1,1,0),E(2,0,2)，D(0,0,2)，

所以，$\overrightarrow{AD}=(0,-2,2)$

设 BE 边上是否存在一点 M，设 $M(2,0,\lambda),\lambda\in[0,2]$

所以，$\overrightarrow{CM}=(2,0,\lambda)$

所以，$\cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CM}>=\left|\frac{2\lambda}{2\sqrt{2}\sqrt{4+\lambda^2}}\right|=\frac{1}{2}$

解得 $\lambda=2$

所以，当点 M 取点 E 时，AD 和 CM 的夹角为60°.

（2）平面 BCE 的法向量$\vec{m}=(0,1,0)$，设平面 OCE 的法向量$\vec{n}=(x_0,y_0,z_0)$

由$\overrightarrow{CE}=(2,0,2),\overrightarrow{CO}=(1,1,0)$

所以，$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CO}=0\end{cases}$

则$\begin{cases}2x_0+2z_0=0,\\ x_0+y_0=0,\end{cases}$，故$\begin{cases}z_0=-x_0,\\ y_0=-x_0,\end{cases}$

令 $x_0=-1,\vec{n}=(-1,1,1)$

因为，二面角 O-CE-B 是锐二面角，记为θ，则$\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19．解：（Ⅰ）由已知 $f(1)=S_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$， $f(2)=S_4-S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$，

$f(3)=S_6-S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}$； …………3 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(1)>1, f(2)>1$；当 $n\geq 3$ 时，猜想： $f(n)<1$.

下面用数学归纳法证明：

（1）由（Ⅰ）当 $n=3$ 时， $f(n)<1$； …………5 分

（2）假设 $n=k(k\geq 3)$ 时， $f(n)<1$，即 $f(k)=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{2k}<1$，

那么 $f(k+1)=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$ …………8 分

$=\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k}<1+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k}\right)$

$=1+\frac{2k-(2k+1)}{2k(2k+1)}+\frac{2k-(2k+2)}{2k(2k+2)}=1-\frac{1}{2k(2k+1)}-\frac{1}{k(2k+2)}<1$，

故当 $n=k+1$ 时， $f(n)<1$ 也成立． 由（1）和（2）知，当 $n\geq 3$ 时， $f(n)<1$……15 分

所以当 $n=1$，和 $n=2$ 时， $f(n)>1$；当 $n\geq 3$ 时， $f(n)<1$. …………16 分

20. 解：(1)第 5 行 $1-4+9-16+25=1+2+3+4+5$--(2分)

第 6 行 $1-4+9-16+25-36=-(1+2+3+4+5+6)$------------------------------(4分)

第 n 行等式为：

$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\cdot(1+2+3+\cdots+n)$.--------------(6分)

(2)证明：①当 $n=1$ 时，左边 $=1^2=1$，

右边 $=(-1)^0\times\frac{1\times(1+1)}{2}=1$，左边=右边，等式成立.--------------------(8分)

②假设 $n=k(k\in N^*)$ 时，等式成立，即 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{k-1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}$.

则当 $n=k+1$ 时，

$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k-1}k^2+(-1)^k(k+1)^2$

$=(-1)^{k-1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2$

$=(-1)^k(k+1)\cdot[(k+1)-\frac{k}{2}]$

$=(-1)^k\cdot\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$.

∴当 $n=k+1$ 时，等式也成立

根据①②可知，对于任何 $n\in N^*$ 等式均成立.--------------------------16 分

【解析】(1)本题考查归纳推理，解题时要认真分析题意中的等式，发现其变化的规律，注意验证即可；

(2)根据数学归纳法证明步骤即可证明.

用数学归纳法证明问题的步骤是：第一步验证当 $n=n_0$ 时命题成立，第二步假设当 $n=k$ 时命题成立，那么再证明当 $n=k+1$ 时命题也成立.本题解题的关键是利用第二步假设中结论证明当 $n=k+1$ 时成立，本题是一个中档题目.