专题 9.1：函数应用题

【拓展探究】

探究 1：以分式函数为载体的函数应用题

1. 工厂生产某种产品，次品率 p 与日产量 x(万件)间的关系为：$p=\begin{cases}\dfrac{1}{6-x} & 0<x\le c,\\ \dfrac{2}{3} & x>c\end{cases}$（$c$ 为常数，且 $0<c<6$）．已知每生产 1 件合格产品盈利 3 元，每出现 1 件次品亏损 1.5 元.

（1）将日盈利额 y(万元)表示为日产量 x(万件)的函数；

（2）为使日盈利额最大，日产量应为多少万件？(注：次品率＝$\dfrac{\text{次品数}}{\text{产品总数}}\times 100\%$)

【解】（1）若 $0<x\le c$，则 $y=3(x-\dfrac{x}{6-x})-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x}{6-x}=3x-\dfrac{9x}{2(6-x)}$，

若 $x>c$，则 $y=3(x-\dfrac{2}{3}x)-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}x=0$ ， $\therefore y=\begin{cases}\dfrac{3(9x-2x^2)}{2(6-x)} & 0<x\le c\\ 0 & x>c\end{cases}$

（2）当 $0<x\le c$，则 $y'=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{(9-4x)(6-x)-(9x-2x^2)(-1)}{(6-x)^2})=\dfrac{3(x-3)(x-9)}{(6-x)^2}$

若 $0<c\le 3$，则 $y'>0$，函数在 $\left(0,c\right]$ 上为增函数，$\therefore x=c, y_{\max}=\dfrac{3(9c-2c^2)}{2(6-c)}$

若 $3<c<6$，在 $(0,3)$ 上为增函数，在 $(3,c)$ 上为减函数，∴当 $x=3$ 时， $y_{\max}=f(3)=\frac{9}{2}$.

综上，若 $0<c\le 3$，则当日产量为 c 万件时，日盈利额最大；若 $3<c<6$，则当日产量为 3 万件时，日盈利额最大.

2. 近年来，某企业每年消耗电费约 24 万元, 为了节能减排, 决定安装一个可使用 15 年的太阳能供电设备接入本企业电网, 安装这种供电设备的工本费(单位: 万元)与太阳能电池板的面积(单位: 平方米)成正比, 比例系数约为 0.5. 为了保证正常用电, 安装后采用太阳能和电能互补供电的模式. 假设在此模式下, 安装后该企业每年消耗的电费 C（单位：万元）与安装的这种太阳能电池板的面积 x (单位:平方米)之间的函数关系是 $C(x)=\dfrac{k}{20x+100}(x\ge 0, k$ 为常数). 记 F 为该村安装这种太阳能供电设备的费用与该村 15 年共将消耗的电费之和.

（1）试解释 $C(0)$ 的实际意义, 并建立 F 关于 x 的函数关系式；

（2）当 x 为多少平方米时，F 取得最小值？最小值是多少万元？

【解】（1）$C(0)$ 的实际意义是安装这种太阳能电池板的面积为 0 时的用电费用，

即未安装电阳能供电设备时全村每年消耗的电费，由 $C(0)=\dfrac{k}{100}=24$，得 $k=2400$，

所以 $F=15\times\dfrac{2400}{20x+100}+0.5x=\dfrac{1800}{x+5}+0.5x, x\geq 0$；

（2）因为 $F=\dfrac{1800}{x+5}+0.5(x+5)-0.25\geq 2\sqrt{1800\times 0.5}-0.25=59.75$.

当且仅当 $\dfrac{1800}{x+5}=0.5(x+5)$， $x=55$ 时取等号，所以当 x 为 55 平方米时，F 取得最小值为 59.75 万元.

探究 2：以分段函数为载体的函数应用题

1. 在等边 ΔABC 中，AB =6cm，长为 1cm 的线段 DE 两端点 D,E 都在边 AB 上，且由点 A 向点 B 运动（运动前点 D 与点 A 重合），$FD\perp AB$，点 F 在边 AC 或边 BC 上；$GE\perp AB$，点 G 在边 AC 或边 BC 上，设 $AD=xcm$.

（1）若 ΔADF 面积为 $S_1=f(x)$，由 DE,EG,GF,FD 围成的平面图形面积为 $S_2=g(x)$，分别求出函数 $f(x),g(x)$ 的表达式；

（2）若四边形 $DEGF$ 为矩形时 $x=x_0$，求当 $x\geq x_0$ 时，设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，求函数 $F(x)$ 的取值范围 .

解：（1）① 当 $0<x\leq 3$ 时，F 在边 AC 上，$FD=x\tan 60^0=\sqrt{3}x$，$\therefore f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$；

当 $3<x\leq 5$ 时，F 在边 BC 上， $FD=(6-x)\tan 60^0=\sqrt{3}(6-x)$，

$$\therefore f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x(6-x)，\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2, 0<x\leq 3\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x(6-x), 3<x\leq 5\end{cases}$$

② 当 $0<x\leq 2$ 时，F、G 都在边 AC 上，$FD=x\tan 60^0=\sqrt{3}x$，

$$EG=\sqrt{3}(x+1)\ \therefore g(x)=\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{3}(x+1)}{2}\cdot 1=\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}；$$

当 $2<x\leq 3$ 时，F 在边 AC 上，G 在边 BC 上，$FD=\sqrt{3}x$，$EG=\sqrt{3}(5-x)\ \therefore g(x)=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$；

当 $3<x\leq 5$ 时，F、G 都在边 BC 上，$FD=\sqrt{3}(6-x)$，$EG=\sqrt{3}(5-x)\ \therefore g(x)=-\sqrt{3}x+\dfrac{11}{2}\sqrt{3}$

$$\therefore g(x)=\begin{cases}\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2},0<x\le 2\\ \frac{5\sqrt{3}}{2},2<x\le 3\\ -\sqrt{3}x+\frac{11}{2}\sqrt{3},3<x\le 5\end{cases}.$$

（2）$x_0=\frac{5}{2}$　① 当$\frac{5}{2}\le x\le 3$时，$F(x)=\frac{x^2}{5},\therefore\frac{5}{4}\le F(x)\le\frac{9}{5}$

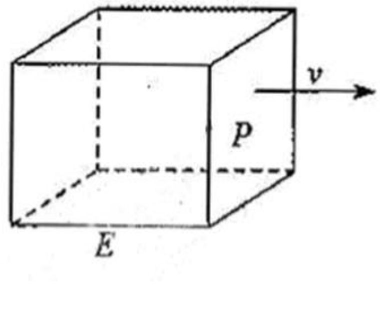
② 当$3\le x\le 5$时，$F(x)=\frac{x^2-6x}{2x-11},\because F^{'}(x)=4\frac{x^2-5x+33}{(2x-11)^2}>0$

$\therefore F(x)$的取值范围为$\left[\frac{5}{4},5\right]\cup\left[\frac{18}{5},10\right]$

2. 如图，长方体物体E在雨中沿面P（面积为S）的垂直方向作匀速移动，速度为v（v>0），雨速沿E移动方向的分速度为$c(c\in R)$，E移动时单位时间内的淋雨量包括两部分：(1) P或P的平行面（只有一个面淋雨）的淋雨量，假设其值与$|v-c|$×S成正比，比例系数为1；(2) 其他面的淋雨量之和，其值为$\frac{1}{2}$. 记y为E移动过程中的总淋雨量，当移动距离$d=100$，面积$S=\frac{3}{2}$S=$\frac{3}{2}$.

（1）写出y的表达式；

（2）设 0＜v≤10,0＜c≤5，试根据c的不同取值范围，确定移动速度v，使总淋雨量y最少.



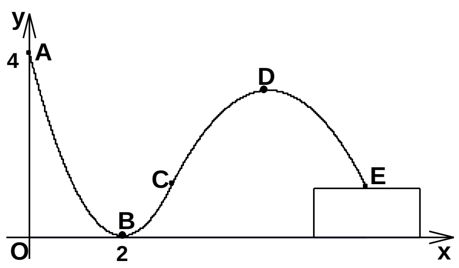
探究 3：以二次函数为载体的函数应用题

1. 轮滑是穿着带滚轮的特制鞋在坚硬的场地上滑行的运动．如图，助跑道 ABC 是一段抛物线，某轮滑运动员通过助跑道获取速度后飞离跑道然后落到离地面高为 1 米的平台上 E 处，飞行的轨迹是一段抛物线 CDE（抛物线 CDE 与抛物线 ABC 在同一平面内），D 为这段抛物线的最高点．现在运动员的滑行轨迹所

在平面上建立如图所示的直角坐标系，x 轴在地面上，助跑道一端点 A(0，4)，另一端点 C(3，1)，点 B(2，0)，单位：米.

（1）求助跑道所在的抛物线方程；

（2）若助跑道所在抛物线与飞行轨迹所在抛物线在点 C 处有相同的切线，为使运动员安全和空中姿态优美，要求运动员的飞行距离在 4 米到 6 米之间（包括 4 米和 6 米），试求运动员飞行过程中距离平台最大高度的取值范围？（注：飞行距离指点 C 与点 E 的水平距离，即这两点横坐标差的绝对值.）



【解】(1）设助跑道所在的抛物线方程为 $f(x)=a_0x^2+b_0x+c_0$，

依题意：$\begin{cases}c_0=4,\\4a_0+2b_0+c_0=0,\\9a_0+3b_0+c_0=1,\end{cases}$ 解得，$a_0=1$，$b_0=-4$，$c_0=4$，

∴助跑道所在的抛物线方程为 $f(x)=x^2-4x+4$.

（2）设飞行轨迹所在抛物线为 $g(x)=ax^2+bx+c$（$a<0$），

依题意：$\begin{cases}f(3)=g(3),\\f'(3)=g'(3),\end{cases}$ 得 $\begin{cases}9a+3b+c=1,\\6a+b=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2-6a,\\c=9a-5,\end{cases}$

$\therefore g(x)=ax^2+(2-6a)x+9a-5=a(x-\dfrac{3a-1}{a})^2+1-\dfrac{1}{a}$，

令 $g(x)=1$ 得，$(x-\dfrac{3a-1}{a})^2=\dfrac{1}{a^2}$，$\because a<0$，$\therefore x=\dfrac{3a-1}{a}-\dfrac{1}{a}=3-\dfrac{2}{a}$，

当 $x=\dfrac{3a-1}{a}$ 时，$g(x)$ 有最大值为 $1-\dfrac{1}{a}$，则运动员的飞行距离 $d=3-\dfrac{2}{a}-3=-\dfrac{2}{a}$，

飞行过程中距离平台最大高度 $h=1-\dfrac{1}{a}-1=-\dfrac{1}{a}$，依题意，$4\le-\dfrac{2}{a}\le6$，得 $2\le-\dfrac{1}{a}\le3$，

即飞行过程中距离平台最大高度的取值范围为在 2 米到 3 米之间.

2. 某单位有员工 1000 名，平均每人每年创造利润 10 万元．为了增加企业竞争力，决定优化产业结构，调整出 x ($x\in \boldsymbol{N}^*$)名员工从事第三产业，调整后他们平均每人每年创造利润为 $10\left(a-\dfrac{3x}{500}\right)$ 万元($a>0$)，剩下的员工平均每人每年创造的利润可以提高 $0.2x\%$.

（1）若要保证剩余员工创造的年总利润不低于原来 1000 名员工创造的年总利润，则最多调整出多少名员工从事第三产业？

（2）在（1）的条件下，若调整出的员工创造出的年总利润始终不高于剩余员工创造的年总利润，则 a 的取值范围是多少？

【解】（1）由题意，得 $10(1000-x)(1+0.2x\%)\geq 10\times 1000$，即 $x^2-500x\leq 0$，又 $x>0$，所以 $0<x\leq 500$．即最多调整 500 名员工从事第三产业．

（2）从事第三产业的员工创造的年总利润为 $10\left(a-\frac{3x}{500}\right)x$ 万元，从事原来产业的员工的年总利润为 $10(1000-x)\left(1+\frac{1}{500}x\right)$ 万元，则 $10\left(a-\frac{3x}{500}\right)x\leq 10(1000-x)\left(1+\frac{1}{500}x\right)$，所以 $ax-\frac{3x^2}{500}\leq 1000+2x-x-\frac{1}{500}x^2$，所以 $ax\leq\frac{2x^2}{500}+1000+x$，即 $a\leq\frac{2x}{500}+\frac{1000}{x}+1$ 恒成立．

因为 $\frac{2x}{500}+\frac{1000}{x}\geq 2\sqrt{\frac{2x}{500}\cdot\frac{1000}{x}}=4$，当且仅当 $\frac{2x}{500}=\frac{1000}{x}$，即 $x=500$ 时等号成立，所以 $a\leq 5$，又 $a>0$，所以 $0<a\leq 5$．所以 a 的取值范围为 $(0，5]$．

【专题反思】你学到了什么？还想继续研究什么？