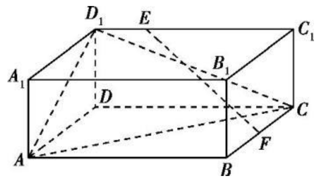
# 周三数学附加题训练 10　2019.11.20

1．已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(1)求 $A^2$；(2)求矩阵 $A$ 的特征值.

2.在极坐标系中,直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$,以极点 O 为坐标原点,极轴 Ox 所在的直线为 x 轴建立平面直角坐标系,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases} x=r\cos\alpha+2, \\ y=r\sin\alpha\text{-}1 \end{cases}$(其中 α 为参数,r>0),若直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点,且 AB=3,求 r 的值.

3. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=4$, $AD=2$, $AA_1=2$, F 是棱 BC 的中点, 点 E 在棱 $C_1D_1$ 上, 且 $D_1E=\frac{1}{3}EC_1$.




（1）求直线 EF 与平面 $D_1AC$ 所成角的正弦值.

（2）求二面角 $A-D_1C-C_1$ 的余弦值

4. 设 $f(n)=(a+b)^n(n\geqslant 2, n\in N^*)$, 若在 f(n) 的展开式中, 存在连续的三项的二项式系数依次成等差数列, 则称 f(n) 具有性质 P.

(1) 求证: f(7) 具有性质 P;

(2) 若存在 $n\leqslant 2\ 018$, 使得 f(n) 具有性质 P, 求 n 的最大值.

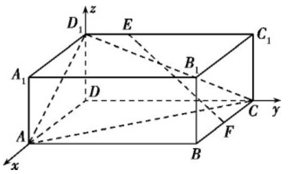
# 周三数学附加题训练10答案

1(1)因为 A=$\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$,所以 $A^2$=$\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix}3\times3+1\times2 & 3\times1+1\times2\\2\times3+2\times2 & 2\times1+2\times2\end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix}11 & 5\\10 & 6\end{bmatrix}$.

(2)矩阵 A 的特征多项式为 f(λ)=$\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\-2 & \lambda-2\end{vmatrix}$= $\lambda^2-5\lambda+4$.令 f(λ)=0,解得 A 的特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$.

2. 直线 l 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-2=0$.曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=r^2$.

圆心 C(2,-1)到直线 l 的距离 $d=\frac{|2+\sqrt{3}-2|}{\sqrt{1+3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $r=\sqrt{d^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$.




3.（1）分别以 DA,DC,$DD_1$ 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 D-xyz,则由已知得

A(2,0,0),C(0,4,0),$D_1$(0,0,2),E(0,1,2),F(1,4,0),

所以$\overrightarrow{D_1A}$=(2,0,-2),$\overrightarrow{D_1C}$=(0,4,-2),$\overrightarrow{EF}$=(1,3,-2).设平面 $D_1AC$ 的法向量为 n=(x,y,z),由

$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{D_1A}=0,\\n\cdot\overrightarrow{D_1C}=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=z,\\z=2y,\end{cases}$取 y=1,则 n=(2,1,2).因为$|\overrightarrow{EF}|=\sqrt{14}$,|n|=3,$\overrightarrow{EF}\cdot n=1$,所以

$\cos\langle\overrightarrow{EF},n\rangle=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot n}{|\overrightarrow{EF}||n|}=\frac{1}{\sqrt{14}\times3}=\frac{\sqrt{14}}{42}$,因为 $\cos\langle\overrightarrow{EF},n\rangle>0$,所以$\langle\overrightarrow{EF},n\rangle$是锐角,且是直线 EF 与平面 $D_1AC$ 所成角的余角,所以直线 EF 与平面 $D_1AC$ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{14}}{42}$.

（2）设平面 $D_1C_1C$ 的法向量 m 为=（1，0，0），$\cos\langle m,n\rangle=\frac{2}{3}$,

∵二面角 A-$D_1$C-$C_1$ 是钝角，∴二面角 A-$D_1$C-$C_1$ 的余弦值是$-\frac{2}{3}$

4.(1)证明: $f(7)=(a+b)^7$的展开式中第 2,3,4 项的二项式系数分别为$C_7^1=7$,$C_7^2=21$,$C_7^3=35$, ∵$C_7^1,C_7^2,C_7^3$成等差数列,∴f(7)具有性质 P.

(2)假设 f(n)具有性质 P,则一定存在 $k\in N^*$,1≤k≤n-1,使得$C_n^{k-1},C_n^k,C_n^{k+1}$成等差数列,

∴$2C_n^k=C_n^{k-1}+C_n^{k+1}$.　　∴$2\times\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$.

化简可得 $4k^2-4nk+n^2-n-2=0$.　　∴$(2k-n)^2=n+2$.

∵$k,n\in N^*$,∴n+2 是完全平方数.

∵n≤2 018,$44^2<2\ 020<45^2$,

∴n 的最大值为 $44^2-2=1\ 934$.

此时 k=989 或 k=945.