

基于数学史的数学学科德育内涵课例分析^①

汪晓勤 邹佳晨

(华东师范大学教师教育学院 200062)

1 引言

《左传·襄公二十四年》：“太上有立德，其次有立功，其次有立言，虽久不废，此之谓不朽。”立德、立言和立功后来就被称为“三不朽”。德才兼备一直是中国古代对人才的要求，司马光称：“才德全尽谓之圣人，才德兼亡谓之愚人，德胜才谓之君子，才胜德谓之小人。”^[1]古希腊“三杰”苏格拉底、柏拉图和亚里士多德都倡导以陶冶人的美德和训练人的理性作为教育的目标，其中，美德包括正义、智慧、勇敢和节制。意大利人文主义教育家弗吉利奥(P. P. Vergerio, 1349—1420)认为，学问和品行是一个人共同的学习目标，而学问从属于道德。^[2]

立德树人是当今教育的根本任务，如何在教学过程中落实立德树人，是数学教育研究的重要课题。《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称《标准》)，将数学学科德育列为数学课程的目标之一：

“通过高中数学课程的学习，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的自信心，养成良好的数学学习习惯；树立敢于质疑、善于思考、严谨求实的科学精神；认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值；进一步促进学生全面、可持续发展。”^[3]

实践表明，在数学教学中，数学史有助于构建知识之谱、彰显方法之美、营造探究之乐、实现能力之助、展示文化之魅、达成德育之效^[4]。但是，在HPM领域，人们对“德育之效”的内涵还缺乏深入的探讨。此外，由于对数学学科德育内涵并没有清晰的认识，一些教师在将数学史融入数学教学

时，对一些德育点往往“视而不见”，从而失去了落实德育的机会。还有一些教师甚至认为，数学与德育没有关系。

有鉴于此，我们根据有关文献，结合《标准》的论述，初步构建基于数学史的数学学科德育的内涵分析框架，并通过若干典型的HPM课例，来说明框架的有效性，为HPM课例研究和数学学科德育的理论和实践研究提供参考。

2 基于数学史的数学学科德育分类框架

19世纪以前，西方学者对数学的德育价值有过长期的讨论。古希腊哲学家柏拉图(Plato, 公元前427—公元前347)认为，几何学可以提升人的智慧，将人的灵魂引向真理；古希腊天文学家托勒密(C. Ptolemy, 约85—165)认为，数学可以提升人的品质；16世纪英国数学家比林斯利(H. Billingsley)认为，数学美化人们的心灵；16世纪教育家韦弗斯(J. L. Vives, 1492—1552)认为，数学对于那些心浮气躁的、慵懒、不思进取的人们具有惩戒和约束作用^[5]；17世纪英国哲学家洛克(J. Locke, 1632—1704)认为，数学让人养成严密推理的习惯；17世纪苏格兰数学家阿布斯诺特(J. Arbuthnot, 1667—1735)在其《论数学学习的益处》中提出：数学使人获得清晰的、论证性的、有条理的推理习惯，为头脑注入生命力，使其免受偏见、轻信和迷信的影响^[6]；18世纪美国物理学家和政治家富兰克林(B. Franklin, 1706—1790)认为，数学证明有助于形成正确思维、精确推理、从一切现象中去伪存真的能力。20世纪初，英国工程师、教育家培利(J. Perry, 1850—1920)在总结数学教育价值时指出：“数学让一个人知道独立思

^① 本文系第十届中国数学会数学史分会学术年会暨第八届数学史与数学教育学术研讨会大会报告；上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”系列论文之一。

考的重要性,摆脱权威之桎梏;让他相信,无论他是服从还是命令,他都只是最高等动物中的一个而已。”^[7]上述诸家观点涉及数学在培养人的理性和品质两个方面的价值。

HPM 视角下的数学教学借鉴历史,注重数学知识的发生和探究过程,还原数学的本来面目,揭示数学背后的人文元素,在数学与人文之间架起一座桥梁,因而有助于理性和品质的培养,但这些并非“德育之效”的全部内涵。根据西方学者对于数学史教育价值的讨论与《标准》提出的课程目标,结合 HPM 视角下的数学教学实践,我们将基

于数学史的德育价值分为理性、信念、情感、品质等,见表 1。

但西方学者所总结的数学史教育价值,并不能涵盖上述四个维度的所有要素。如,他们很少提及爱国主义,但爱国是每一位公民应该具备的品质(对应于一般核心素养“责任担当”中的“国家认同”),是数学学科德育不可或缺的组成部分。此外,一般核心素养的某些要素,如“责任担当”中的“国际理解”等,在 HPM 教育价值分类框架中被归入“文化之魅”维度^[13]。

表 1 基于数学史的数学学科德育的分类框架

| 要素 | 部分代表性观点 | 作者 | 一般核心素养 | 《标准》中的德育目标 |
|----|--|---|-----------|--------------------------|
| 理性 | (1)数学史可以培育学生坚持真理、追求创新的精神。 | 查纳基斯与阿卡维 ^[8] | 科学精神 | 树立敢于质疑、善于思考、严谨求实的科学精神 |
| 情感 | 数学史可以: (1)增加学生的学习动机; (2)使数学变得更亲和、更令人愉悦、更激动人心; (3)增加对数学的兴趣 | 福韦尔 ^[9] ;古里克斯与布罗姆 ^[10] ;詹克维斯特 ^[11] | 学会学习 | 提高学习数学的兴趣,增强学好数学的自信心 |
| 信念 | 数学史揭示: (1)数学乃是人类的一种文化活动,因而数学是一门人性化的学科; (2)数学是一门不断演进的学科,而不是一个僵化的真理系统; (3)在数学上,错误、启发式论证、不确定性、怀疑、直观论证、死胡同、争议、问题的另类解法不仅是合情合理的,而且也是数学在其发展过程中的不可分割的一部分。 | 查纳基斯与阿卡维 ^[8] ;詹克维斯特 ^[11] | 人文底蕴 | 认识科学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值 |
| 品质 | (1)数学史告诉学生,面对挫折、失败和错误,不必灰心丧气。 (2)数学史可以让学生学会摒弃自我为中心的思维习惯,学会倾听、尊重和包容。 (3)培养优秀生的远见卓识。 | 查纳基斯与阿卡维 ^[8] 阿卡维与磯田 ^[12] 福韦尔 ^[9] | 健康生活,责任担当 | 促进学生全面、可持续发展 |

以下我们通过近年来 HPM 专业学习共同体所开发的 10 个 HPM 课例来分析基于数学史的数学学科德育诸要素。

3 数学学科德育案例分析

3.1 理性

理性指的是通过符合逻辑的推理而非依靠经验、表象进行判断、分析、综合、获得结论的能力。

在课例“平方差公式”^[14]中,教师以等周长方

形土地出租问题引入 $(a+b)(a-b)$ 的计算问题,告诉学生不能仅凭经验或直觉去作判断。事实上,古人有“周长越长,面积越大”的迷思概念;而数学教育研究表明,这种迷思概念今天依然存在^[15]。

在课例“对顶角和邻补角”^[16]中,当学生说“对顶角看上去就是相等的”时,教师通过视错觉图形来说明“眼见不一定为实”的道理,强调说理的重要性。正如斯顿和米利斯在其《平面几何》

(1916)中所说：“要检验作图的准确性、发现或确立一般事实，仅仅靠测量和实际操作是不可靠的。要获得数学真知，最好的方法是通过推理。”^[17]在课堂教学的尾声，教师通过微视频，介绍古希腊哲学家泰勒斯对于数学证明的开创性贡献，说明数学证明是人类认识世界从感性上升到理性的重要标志。

在课例“三角形内角和”^[18]和“三角形中位线”^[19]中，教师都借鉴所讲授主题的历史起源设计了操作活动(拼图和剪纸)，但强调：实验操作只是数学发现的手段，还需要对所得出的结论进行说理或演绎证明，方能确立有关定理的正确性。

在“有理数的乘法”^[20]中，教师讲述了19世纪法国作家司汤达学习“负负得正”的故事，故事中，司汤达的数学老师未能对“负负得正”的合理性作出解释，面对司汤达的“债务乘以债务何以能等于收入”的疑问，更是彻底崩溃。教师引入探究活动：如何帮助司汤达解决上述疑问？课堂上，学生各自从生活实例出发给出自己的解释。教师借此培养学生的理性思维方式：对于规定性的数学法则，不能仅仅满足于知其然(记忆法则)，还要知其所以然(探究法则的合理性)。

可见，数学史融入数学教学，可以让学生理解直觉、经验、观察、测量、实验操作的局限性以及说理与证明的必要性，并树立“探求所以然”的意识。

3.2 信念

数学信念指的是个体关于数学的主观知识，Kloosterman(2002)将其分成对数学的信念和对数学学习的信念两大类^[21]。

一部数学的历史就是人类思想、方法、语言、工具的演进史。在课例“字母表示数”^[22]中，教师让学生解决古希腊数学家丢番图(Diophantus, 约200—284)《算术》中的一个问题：“已知两数的和与差，求这两个数”。多数学生与丢番图一样，采用“缩略代数”的方法，即设所求的两个数分别为 x 和 y ，它们的和与差分别用特殊值来代替，从而通过解二元一次方程组，得到两个数。教师将学生称为“小丢番图”，并告诉他们：已知的和与差(尽管题中没有给出具体数值)事实上也可以用字母来表示，这是16世纪法国数学家韦达(F. Viète, 1540—1603)的做法。据此，教师让学生认识代数从缩略代数到符号代数的变化过程，从而感悟

数学的演进性。类似地，在课例“完全平方公式”^[23]中，教师通过微视频，追溯完全平方公式从欧几里得《几何原本》中的几何命题到韦达以字母表示的代数恒等式的过程(图1)，让学生认识数学语言的演进性。

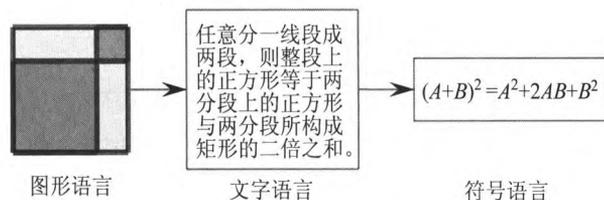


图1 完全平方公式的语言演进

数学历史留下了人们探索新知时的许多错误。在课例“可化为一元二次方程的分式方程”^[24]中，教师在PPT中呈现了18世纪英国盲人数学家桑德森(N. Saunderson, 1682—1739)解一个分式方程的过程：

$$\begin{aligned} \frac{42x}{x-2} &= \frac{35x}{x-3} \\ \Rightarrow \frac{42}{x-2} &= \frac{35}{x-3} \\ \Rightarrow 42(x-3) &= 35(x-2) \\ \Rightarrow x &= 8. \end{aligned}$$

这里，桑德森在方程两边约去 x ，导致失根。由此，让学生看到历史上数学家“忽略零根”的错误。

任何数学知识背后都有其发生和发展的历史动因，包括内在动因和外在动因。许多HPM课例都借鉴了数学知识的外在动因。古巴比伦土地分割问题导致三角形中位线定理的诞生；古希腊地砖密铺问题导致三角形内角和定理的发现；源于古希腊土地分配的等周问题导致平方差公式的应用；而全等三角形判定定理则是古人的一种距离测量方法的重要依据。有关课例揭示了数学知识的现实来源，让学生感受到数学的应用价值。

课例“全等三角形的应用”^[25]中，教师借鉴角边角定理的历史设计了天堑宽度测量的探究活动，学生最终运用泰勒斯的方法成功解决问题。这种跨越时空的探究活动，让学生认识到“学过的知识可以运用于生活实际”、“数学有很强的实践性和广泛的应用性”、“数学绝不仅仅是一个死板枯燥的学科，它是一个广阔无垠的世界，一个拥有无限可能、无限机会和无限美丽的新世界”^[25]。

可见,在数学课堂上展现数学的历史,可以帮助学生认识数学和数学活动的本质:数学知识并非从天而降,而是源于人类的现实生活;数学是人类的文化活动,是人性化、演进性的学科;数学家也会犯错误.凡此种种,均可让学生树立正确的数学观.

3.3 情感

情感指的是个体对于数学和数学学习的倾向性,包括动机、兴趣、自信心等.作为学校课程的数学在人们心目中往往是枯燥乏味的,因为学生面对的往往是冷冰冰的概念、公式、定理和法则以及做不完的卷子,几乎看不到数学学科中的人的元素.将数学史融入数学教学,意味着恢复数学的人性,让数学课堂充满人文元素,这必然可以激发学生的学习兴趣,也是一线教师眼中数学史的主要教育价值.上文我们说到,数学史揭示了数学主题产生和发展的动因,课堂上再现这些动因,自然也就激发了学生的学习动机.

许多 HPM 课例都借鉴有关主题的历史来设计数学探究活动,在学生获得探究结果之后,教师将其与历史上数学家的方法进行对比.此时,学生仿佛“穿越时空与数学家对话”,而数学家又仿佛成了班里的“一名额外的学生”.在课例“三角形内角和”^[18]中,教师设计了“用六个同样的等腰三角形或不等边三角形进行拼图”的活动,活动中,学生自主发现三角形内角和等于 180° .教师进而让学生分组探究三角形内角和的说理方法,最终,各组得到图 2 所示的四种方法.教师在评价诸方法时指出,方法 1—4 分别是古希腊毕达哥拉斯学派、欧几里得、18 世纪法国数学家克莱罗(A. C. Clairaut, 1713—1765)和 19 世纪美国教科书给出的方法.

在课例“三角形的中位线”^[19]中,教师设计“将三角形土地四等分”的探究任务,从其中“联结各边中点”的分割方案中发现中位线的性质,并让学生探究性质的证明.课堂上学生相继给出四种证明(图 3).教师在评价诸方法时指出:方法 1(在中位线上做高线)其实就是我国三国时代数学家刘徽在证明三角形面积公式时所采用的“出入相补法”;而方法 2(在中位线上作中线)突破了刘徽的“将三角形转化为矩形”的限制,方法 3(在中位线上任取一点与顶点联结)更是将刘徽的“出入相

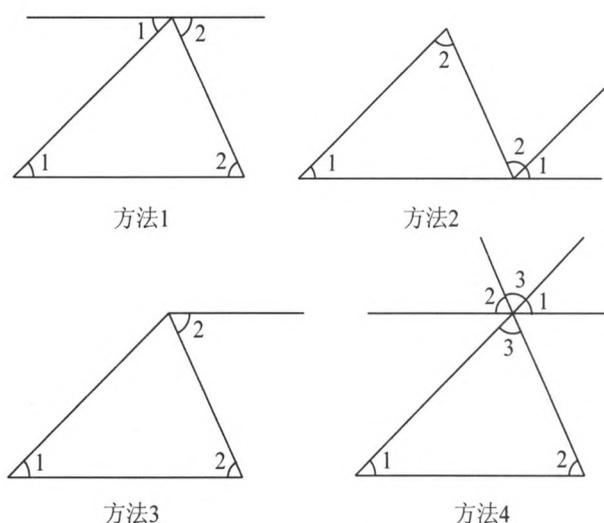


图 2 七年级学生对三角形内角和的说理

补法”一般化,是对出入相补法的创造性运用.

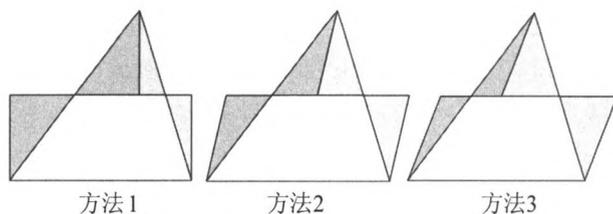


图 3 八年级学生对三角形中位线定理的证明

在课例“一元二次方程的配方法”^[26]中,教师借鉴 9 世纪阿拉伯数学家花拉子米(Al-Khwarizmi, 约 780—850)解一元二次方程的几何方法,设计“用几何方法配方”的探究活动.在引导学生用花拉子米的方法完成一元二次方程 $x^2 + 10x = 15$ 的图形配方之后,一名学生给出了新的几何解法(图 4).教师在评价该方法时,进行了古今联系:这种配方法与三国时代数学家赵爽的方法(图 5)异曲同工!用今日代数语言来表达,学生的方法相当于:

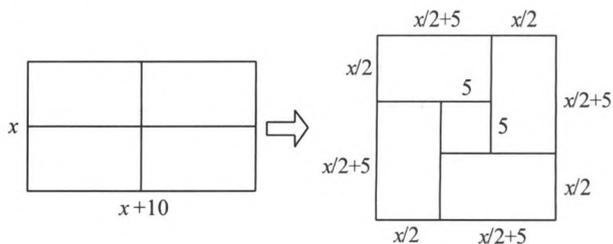


图 4 学生关于方程 $x^2 + 10x = 15$ 的几何解法

$$\begin{aligned} x^2 + 10x &= 15 \\ \Rightarrow x(x+10) &= 15 \end{aligned}$$

哲学家以研究日月天、追寻自然规律为人生理想,他们并不急功近利;但另一方面,知识就是力量,知识在现实生活中也能带来物质财富.坚持不懈、从容淡定、胸怀理想、志存高远,是优秀品质修养的组成部分.

此外,在有关课例中,中国古代数学家刘徽、赵爽的思想方法无疑是爱国主义教育的理想素材.

4 结语

以上我们看到,在所考察的十个初中 HPM

课例中,数学史在形成理性思维、激发积极情感、树立正确信念、培养优秀品质等方面都起着独特的作用.表 2 给出了诸课例所体现的德育内涵以及相应的数学史运用方式.

由于教师对于数学学科德育的内涵理解得不够全面,对于相关主题历史的了解也不够深入,各课例在设计和实施上还有很大的完善空间.但在 HPM 专业学习共同体中,上述问题完全可以得到解决.我们深信,将数学史融入数学教学,必将成为实施数学学科德育的一条有效途径.

表 2 基于数学史的学科德育在课堂中的落实

| 德育要素 | 部分内涵 | 课堂活动 | 数学史运用方式 |
|------|--|---|---------------------|
| 理性 | 不能仅仅凭借经验、直觉、观察、操作得出结论;不能仅仅满足于知其然,还要知其所以然 | 根据视错觉图形判断结论是否正确;运用历史上数学家的方法证明公式或定理;探究数学法则的合理性 | 附加式; 顺应式 |
| 信念 | 数学源于生活;数学是人性化、演进性的学科,数学家也会犯错误 | 解决根据数学史改编的实际问题;运用历史上不同的方法解决同一个问题;辨析数学家解决问题的方法;观看微视频,了解有关主题的历史演进过程 | 附加式; 顺应式; 重构式 |
| 情感 | 数学学习的动机、兴趣、自信心 | 解决根据数学史改编的实际问题;观看有关数学史的微视频;对照学生的方法和古代数学家的方法 | 附加式; 顺应式 |
| 品质 | 倾听、交流、坚韧、志存高远、爱国主义 | 解决根据数学史改编的实际问题,并表达自己的解法或见解;聆听数学家的故事;学习中国古代数学家的思想方法 | 附加式; 复制式; 顺应式 |

参考文献

- [1] 司马光. 资治通鉴(卷第一,周纪一)[M]. 北京:中华书局, 1956: 14
- [2] 博伊德. 西方教育史[M]. 北京:人民教育出版社, 1985
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京:人民教育出版社, 2018
- [4] Wang, X., Qi, C., Wang, K. A categorization model for educational values of history of mathematics: an empirical study [J]. Science & Education, 2017, 26: 1029-1052
- [5] Cajori, F. Mathematics in Liberal Education[M]. Boston: The Christopher Publishing House, 1928
- [6] Arbuthnot, J. An Essay on the Usefulness of Mathematical Learning[M]. Oxford: Anth. Peisley, 1701
- [7] Mock, G. D. The Perry Movement [J]. Mathematics Teacher, 1963, 55(3): 130-133
- [8] Tzanakis, C., Arcavi, A. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey [C]. In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 201-240
- [9] Fauvel, J. Using history in mathematics education [J]. For the Learning of Mathematics, 1991, 11(2): 3-6

- [10] Gulikers I., Blom K. A historical angle: A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education [J]. Educational Studies in Mathematics, 2001, 47: 223-258
- [11] Jankvist U. T. A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education [J]. Educational Studies in Mathematics, 2009, 71: 235-261
- [12] Arcavi, A., Isoda, M. Learning to listen: from historical sources to classroom practice [J]. Educational Studies in Mathematics, 2007, 66(2): 111-129
- [13] 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2019, (2): 37-43
- [14] 李玲, 顾海萍. “平方差公式”: 以多种方式融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育), 2014(11): 35-39
- [15] Kospentaris, G., Spyrou, P., Lappas, D. Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. Educational Studies in Mathematics, 77(1): 105-127
- [16] 顾海萍, 孙丹丹. HPM 视角下的邻补角、对顶角教学[J]. 中学数学月刊, 2018, (9): 45-48

(下转第 19 页)

育关注的焦点,数学文化影视则为发挥数学的德育价值提供了良好的素材.事实上,许多数学文化影视揭示出了数学背后的人文精神,特别是数学家在研究数学过程中所体现出来的顽强意志、坚韧不拔的精神,这些都有助于培养学生积极的情感态度和价值观.

当前,在中小学数学教学中利用数学文化影视来引导学生更好地品味数学、欣赏数学的做法似乎还不多见,这需要数学教育工作者的共同努力.

参考文献

- [1]王庚.数学文化之魅力——西方数学影视大观[J].科学,2007(5):57-61
- [2]金振蓉.如何让数学走近公众——来自国际数学家大会的热点话题(下)[N].光明日报,2002-08-28
- [3]李文林.数学史概论(第二版)[M].北京:高等教育出版社,2002
- [4]王青建,孙茜.数学传播大师——马丁·加德纳[J].自然辩证法研究,2010(5):57-61
- [5]王建磐.数学为体 文化为魂——李大潜主编的《数学文化小丛书》第一、二辑读后[J].数学教育学报,2015(2):1-3
- [6]林群.数学小丛书文化大观园——读《数学文化小丛书》[J].数学通报,2016(1):63
- [7]豆瓣读书.博士热爱的算式[EB/OL].<https://book.douban.com/subject/11640937/>.访问时间:2018-07-25
- [8]豆瓣电影.博士的爱情方程式[EB/OL].<https://movie.douban.com/subject/1788622/reviews>.访问时间:2018-07-28
- [9][美]保罗·霍夫曼.数字情种——埃尔德什传[M].米绪军,等译.上海:上海科技教育出版社,2000
- [10]Amicable pairs list [EB/OL].<https://sech.me/ap/index.html>.访问时间:2018-09-02
- [11]刘建亚.孪生素数猜想[J].数学通报,2014(1):1-2,7
- [12]Hardy, G. H. A mathematician's apology[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1940
- [13]席南华.基础数学的一些过去和现状[J].中国科学院院刊,2012(2):134-144
- [14]Atiyah, M. F. Mathematics: art and science [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 2005(1): 87-88
- [15]Rota, G. C. The phenomenology of mathematical beauty [J]. Synthese, 1997(2): 171-182
- [16]Cellucci, C. Mathematical beauty, understanding, and discovery [J]. Foundations of Science, 2015(4): 339-355
- [17]许展阳.我心中的数学家——未来科学大奖获奖致辞[EB/OL].https://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzI2NDIzMjYyMA%3D%3D&idx=1&mid=2247487112&sn=6267ef456a89bfb84ccf0c87d5f5d44a.访问时间:2018-09-08
- [18]Nowlan, R. A. A dictionary of quotations in mathematics [M]. Jefferson: McFarland & Company, 2002
- [19]彭刚.缅怀数学大师 品味数学文化——纪念传奇数学家埃尔德什诞辰100周年[J].数学通报,2014(7):28-30
- [20]孟建伟.科学与人文精神[J].哲学研究,1996(8):18-25
- [21]让·迪厄多内.当代数学——为了人类心智的荣耀[M].沈永欢,译.上海:上海教育出版社,1999
- [22]彭刚.职前教师数学观发展研究:数学史的视角[D].上海:华东师范大学,2017
- [17] Stone, J. C., Millis, J. F. Plane Geometry. Chicago: B. H. Sanborn & Company, 1916
- [18]唐秋飞.“三角形内角和”:在多个环节中渗透数学史[J].教育研究与评论(中学教育),2015(7):69-73
- [19]张莉萍,栗小妮.HPM视角下的“三角形中位线”的教学[J].数学教学,2018,(7):11-15
- [20]王进敬,栗小妮.HPM视角下的有理数运算教学[J].中小学课堂教学研究,2019,(3):10-14
- [21] Kloosterman, P. (2002). Beliefs About Mathematics and Mathematics Learning in the Secondary School: Measurement and Implications for Motivation. In: G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.). Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 247-269.
- [22]孙洲.HPM视角下的“用字母表示数”教学[J].数学教学,2017,(6):28-30;46
- [23]栗小妮,沈中宇.完全平方公式:从历史中找动因、看形式[J].教育研究与评论(中学教育),2018,(3):46-51
- [24]王倩,沈中宇,洪燕君.HPM视角下可化为一元二次方程的分式方程教学[J].数学教学,2017,(7):23-26
- [25]陈嘉尧.HPM微课在全等三角形教学中的应用[J].数学教学,2016,(6):41-45
- [26]王进敬.HPM视角下的一般一元二次方程解法(配方法)[J].中小学数学(初中版),2019,(1-2):33-36

(上接第12页)