

# 数学视角切入 核心素养引领

● 江苏省宜兴市第二高级中学 蒋 丽

新高考数学坚决落实“立德树人”的根本任务，全面贯彻高考评价体系的要求，推动人才培养的改革创新，逐渐增强数学考试的基础性、方向性、综合性、应用性、时代性、科学性、探究性和开放性等，正确把握高考数学命题与高中数学课程标准、数学核心素养等之间的关系，借助数学的眼光、数学的思维、数学的语言等视角切入，核心素养引领，充分发挥高考数学对中学数学教育教学的正确导向作用。

## 一、用数学的眼光观察世界 —— 数学抽象、直观想象

### 1. 数学抽象

借助数学抽象，获得数学概念和规则，提出数学命题和模型，形成数学方法与思想，认识数学结构与体系。

**例 1** (2020 年高考数学全国卷 III 理科第 11 题)

设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，离心率为  $\sqrt{5}$ 。P 是 C 上一点，且  $F_1P \perp F_2P$ 。若  $\triangle PF_1F_2$  的面积为 4，则  $a =$  ( )。

A. 1      B. 2      C. 4      D. 8

**解析：**利用双曲线的焦点三角形面积公式，可得

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{b^2}{\tan \frac{\theta}{2}} = \frac{b^2}{\tan 45^\circ} = b^2 = 4, \text{ 由于双曲线 } C \text{ 的离}$$

心率为  $\sqrt{5}$ ，可得  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}} = \sqrt{5}$ ，解得  $a = 1$ 。

故选 A。

**点评：**借助数学抽象，根据双曲线的焦点三角形

面积公式  $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{b^2}{\tan \frac{\theta}{2}}$  (其中  $\angle F_1PF_2 = \theta$ ) 来直接

应用，形成有心圆锥曲线的焦点三角形相关的数学方法和思想，大大降低代数运算的成本，起到事半功倍之效。

### 2. 直观想象

借助直观想象，建立形与数的联系，利用几何图形描述问题，借助几何直观理解问题，运用空间想象认识事物，构建数学问题的直观模型解决问题。

**例 2** (2020 年高考数学新高考卷 I (山东卷) 第 7 题) 已知 P 是边长为 2 的正六边形 ABCDEF 内的一点，则  $\vec{AP} \cdot \vec{AB}$  的取值范围是 ( )。

A.  $(-2, 6)$       B.  $(-6, 2)$

C.  $(-2, 4)$       D.  $(-4, 6)$

**解析：**如图 1 所示，取 A 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，则  $A(0, 0), B(2, 0), C(3, \sqrt{3}), F(-1, \sqrt{3})$ ，设  $P(x, y)$ ，则  $\vec{AP} = (x, y)$ ， $\vec{AB} = (2, 0)$ ，且  $-1 < x < 3$ ，所以  $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = (x, y) \cdot (2, 0) = 2x \in (-2, 6)$ 。

故选 A。

**点评：**合理借助建系法，直观想象，建立数与形之间的联系，可以把复杂的平面向量的数量积问题“数”化，借助对应点的坐标的确定，通过对对应向量的坐标表示，利用平面向量的数量积公式的转化，借助参数的取值范围来有效确定数量积的取值范围问题。

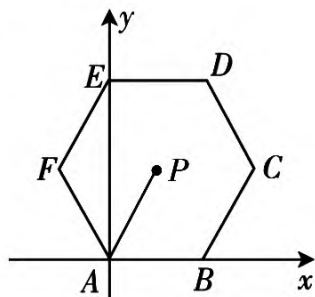


图 1

## 二、用数学的思维分析世界 —— 逻辑推理、数学运算

### 3. 逻辑推理

借助逻辑推理，发现和提出命题，掌握推理的基本形式和规则，探索和表述论证的过程，构建命题体系，表达与交流等。

**例 3** (2020 年高考数学全国卷 II 文科第 12 题)

若  $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$ ，则 ( )。

A.  $\ln(y - x + 1) > 0$       B.  $\ln(y - x + 1) < 0$

C.  $\ln|x - y| > 0$       D.  $\ln|x - y| < 0$

**解析：**由  $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$ ，可得  $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$ ，构造函数  $f(t) = 2^t - 3^{-t}$ 。由于函数  $y = 2^x$  为  $\mathbf{R}$

上的增函数,函数  $y = 3^{-x}$  为  $\mathbf{R}$  上的减函数,则函数  $f(t) = 2^t - 3^{-t}$  为  $\mathbf{R}$  上的增函数,则有  $x < y$ ,那么  $y - x > 0$ ,即  $y - x + 1 > 1$ ,可知  $\ln(y - x + 1) > 0$ ,则选项 A 正确,选项 B 错误.又  $|x - y|$  与 1 的大小无法确定,故选项 C、D 无法确定.

故选 A.

点评:借助逻辑推理的应用,通过函数的构造,利用指数函数、复合函数的单调性来综合,结合指数式的大小关系来确定参数值的大小关系,并结合对数运算来判断对数值的正负取值情况,很好考查推理论证能力与数学运算能力等.

#### 4. 数学运算

借助数学运算,理解运算对象,掌握运算法则,探究运算思想,设计运算程序等.

例 4 (2020 年高考数学浙江卷第 13 题) 已知  $\tan \theta = 2$ ,则  $\cos 2\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解析:由于  $\tan \theta = 2$ ,

$$\begin{aligned} \text{结合二倍角公式可得 } \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \\ \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} &= \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1 - 2^2}{1 + 2^2} = -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{结合两角差的正切公式可得 } \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) &= \\ \frac{\tan \theta - 1}{1 + \tan \theta} &= \frac{2 - 1}{1 + 2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

故填答案:  $-\frac{3}{5}; \frac{1}{3}$ .

点评:三角恒等变换公式是数学运算中灵活多变的一个知识点,公式众多,运算技巧性强.以上问题中综合了二倍角公式、两角差的正切公式等,借助三角公式的应用来合理数学运算,正确转化,巧妙求解.

### 三、用数学的语言表达世界 —— 数学建模、数据分析

#### 5. 数学建模

借助数学建模,发现和提出问题,建立和求解模型,检验和完善模型等.

例 5 (2020 年高考数学全国卷 I 理科第 14 题) 设  $a, b$  为单位向量,且  $|a + b| = 1$ ,则  $|a - b| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解析:由于  $a, b$  为单位向量,且  $|a + b| = 1$ ,如图 2,在平面内,设向量  $a, b, a + b$  所对应的点分别为  $A, B, P$ (起点均为坐标原点  $O$ ),根据平面向量以及线性运算的几何意义可知,  $|a + b|$  和  $|a - b|$  是以平面向

量  $\vec{OA}$  和  $\vec{OB}$  为两邻边的平行四边形的两条对角线的长,由于  $|a| = |b| = |a + b| = 1$ ,则知平行四边形  $OAPB$  是边长为 1,一条对角线为 1 的菱形,所以该菱形的另一条对角线长为  $|a - b| = \sqrt{3}$ .

故填答案:  $\sqrt{3}$ .

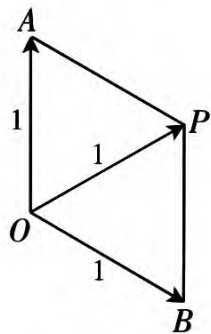


图 2

点评:几何意义法是破解平面向量、复数等问题中的常见思维方式之一,也是数学建模的重要体现.通过几何意义法的应用,结合平面几何图形的几何特征,合理数学建模,可以用来解决平面向量或复数中的相关问题,抓住平面向量或复数中的相关知识的几何意义,从几何意义的角度出发,回归本质,数形结合,直观想象,可以直观形象地处理相关问题.

#### 6. 数据分析

借助数据分析,收集数据提取信息,利用图表展示数据,构建模型分析数据,解释数据获取知识等.

例 6 (2020 年高考数学全国 II 卷理科第 3 题,文科第 4 题) 在新冠肺炎疫情防控期间,某超市开通网上销售业务,每天能完成 1200 份订单的配货,由于订单量大幅增加,导致订单积压.为解决困难,许多志愿者踊跃报名参加配货工作.已知该超市某日积压 500 份订单未配货,预计第二天的新订单超过 1600 份的概率为 0.05,志愿者每人每天能完成 50 份订单的配货,为使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于 0.95,则至少需要志愿者( ).

A. 10 名    B. 18 名    C. 24 名    D. 32 名

解析:由题意知,超市第二天能完成 1200 份订单的配货,若没有志愿者帮忙,则超市第二天共会积压超过  $500 + (1600 - 1200) = 900$  份订单的概率为 0.05,因此要使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于 0.95,至少需要志愿者  $\frac{900}{50} = 18$ (名).

故选 B.

点评:结合阅读与理解,合理进行数据分析,归纳与总结出题目的内涵,合理构建数学模型,结合相应的数学知识来分析与处理相应的问题,实现获取新知识、探究新问题的能力与目的.

新高考数学通过贯彻指导思想,把握改革精神,创新试题设计,优化试卷结构,通过数学的眼光、数学的思维、数学的语言等视角切入,有效落实数学核心素养的培养,推进高考综合改革创新,引导中学数学教学与学习等.  $\blacksquare$