

31. [2017 全国III卷(文)-T04]已知 $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{4}{3}$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

- A. $-\frac{7}{9}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{7}{9}$

【解答】解: $\because \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{4}{3}, \therefore (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - \sin 2\alpha = \frac{16}{9},$

$$\therefore \sin 2\alpha = -\frac{7}{9},$$

故选: A.

32. [2017 全国III卷(文)-T06]函数 $f(x) = \frac{1}{5}\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{6})$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{6}{5}$ B. 1 C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

【解答】解: 函数 $f(x) = \frac{1}{5}\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{5}\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(-x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{5}\sin$

$$(x + \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{\pi}{3})$$

$$= \frac{6}{5}\sin(x + \frac{\pi}{3}) \leq \frac{6}{5}.$$

故选: A.

33. [2018 全国 I 卷(理)-T06]在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB} =$ ()

- A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

【解答】解: 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点,

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC},$$

故选: A.

34. [2018 全国 II 卷(理)-T04] 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, 则 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = (\quad)$

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 0

【解答】解：向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, 则 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 1 = 3$,

故选：B.

35. [2018 全国 II 卷(理)-T06] 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $BC=1$, $AC=5$, 则 $AB=(\quad)$

- A. $4\sqrt{2}$ B. $\sqrt{30}$ C. $\sqrt{29}$ D. $2\sqrt{5}$

【解答】解：在 $\triangle ABC$ 中, $\cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos C = 2 \times (\frac{\sqrt{5}}{5})^2 - 1 = -\frac{3}{5}$,

$$BC=1, AC=5, \text{ 则 } AB = \sqrt{BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos C} = \sqrt{1 + 25 + 2 \times 1 \times 5 \times \frac{3}{5}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

故选：A.

36. [2018 全国 III 卷(理)-T04] 若 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha = (\quad)$

- A. $\frac{8}{9}$ B. $\frac{7}{9}$ C. $-\frac{7}{9}$ D. $-\frac{8}{9}$

【解答】解： $\because \sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\therefore \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$.

故选：B.

37. [2018 全国 III 卷(理)-T09] $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, 则 $C = (\quad)$

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

【解答】解： $\because \triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .

$$\triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4},$$

$$\therefore \sin C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos C,$$

$$\because 0 < C < \pi, \therefore C = \frac{\pi}{4}.$$

故选：C.

38. [2018 全国 III 卷(文)-T06] 函数 $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$ 的最小正周期为 $(\quad)$

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

【解答】解：函数 $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{2} \sin 2x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ ，

故选：C.

39. [2016 全国 II 卷(理)-T07] 若将函数 $y = 2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，则平移后的图象的对称轴为()

A. $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$

【解答】解：将函数 $y = 2\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到

$$y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

由 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 得： $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ ，

即平移后的图象的对称轴方程为 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ ，

故选：B.

40. [2016 全国 II 卷(理)-T09] 若 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$ ，则 $\sin 2\alpha =$ ()

A. $\frac{7}{25}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $-\frac{1}{5}$

D. $-\frac{7}{25}$

【解答】解：法一： $\because \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$ ，

$$\therefore \sin 2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - 1 = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25},$$

法二： $\because \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{3}{5}$ ，

$$\therefore \frac{1}{2}(1 + \sin 2\alpha) = \frac{9}{25},$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25},$$

故选：D.

41. [2016 全国 III 卷(理)-T03] 已知向量 $\overrightarrow{BA} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ，则 $\angle ABC =$ ()

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 120°

【解答】解： $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$ ；

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

又 $0^\circ < \angle ABC < 180^\circ$; $\therefore \angle ABC = 30^\circ$.

故选: A.

42. [2016 全国III卷(理)-T08] 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$, 则 $\cos A$ 等于(

)

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

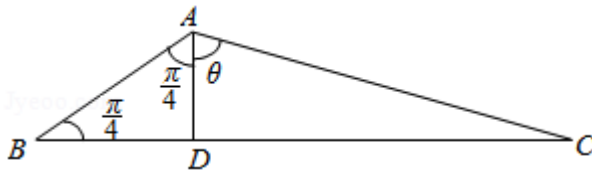
B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【解答】解: 设 $\triangle ABC$ 中角 A 、 B 、 C 、对应的边分别为 a 、 b 、 c , $AD \perp BC$ 于 D , 令

$$\angle DAC = \theta,$$



$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高 $AD = h = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}a$,

$\therefore BD = AD = \frac{1}{3}a$, $CD = \frac{2}{3}a$,

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $\cos \theta = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{a}{3}}{\sqrt{(\frac{1}{3}a)^2 + (\frac{2a}{3})^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 故 $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$$\therefore \cos A = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

故选: C.

43. [2016 全国III卷(文)-T09] 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$, 则 $\sin A =$ (

)

A. $\frac{3}{10}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【解答】解: $\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$, $\therefore AB = \frac{\sqrt{2}}{3}BC$,

由余弦定理得: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B} = \sqrt{\frac{2}{9}BC^2 + BC^2 - \frac{2}{3}BC^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}BC$,

$$\text{故 } \frac{1}{2}BC \cdot \frac{1}{3}BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}BC \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}BC \cdot \sin A,$$

$$\therefore \sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

故选: D.

45. [2017 全国 I 卷(理)-T09] 已知曲线 $C_1: y = \cos x$, $C_2: y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$, 则下面结论正确的是()

A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

【解答】解: 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y = \cos 2x$ 图

象, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到函数

$$y = \cos 2(x + \frac{\pi}{12}) = \cos(2x + \frac{\pi}{6}) = \sin(2x + \frac{2\pi}{3}) \text{ 的图象, 即曲线 } C_2,$$

故选: D.

46. [2017 全国III卷(理)-T06] 设函数 $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$, 则下列结论错误的是()

A. $f(x)$ 的一个周期为 -2π

B. $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{8\pi}{3}$ 对称

C. $f(x + \pi)$ 的一个零点为 $x = \frac{\pi}{6}$

D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递减

【解答】解: A. 函数的周期为 $2k\pi$, 当 $k = -1$ 时, 周期 $T = -2\pi$, 故 A 正确,

B. 当 $x = \frac{8\pi}{3}$ 时, $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{8\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{9\pi}{3} = \cos 3\pi = -1$ 为最小值, 此时 y

$=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$ 对称, 故 B 正确,

C 当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时, $f(\frac{\pi}{6}+\pi)=\cos(\frac{\pi}{6}+\pi+\frac{\pi}{3})=\cos\frac{3\pi}{2}=0$, 则 $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$,

故 C 正确,

D . 当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, $\frac{5\pi}{6} < x+\frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$, 此时函数 $f(x)$ 不是单调函数, 故 D 错误,

故选: D .

47. [2019 年全国 I 卷(文)·T7] $\tan 255^\circ =$

A. $-2-\sqrt{3}$

B. $-2+\sqrt{3}$

C. $2-\sqrt{3}$

D. $2+\sqrt{3}$

【答案】D

详

解

:

$\tan 0 =$

a

$=$

$$\frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

48. [2019 年全国 II 卷(文)·T8] 若 $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin \omega x (\omega > 0)$ 两个相邻的极值

点, 则 $\omega =$

A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

【答案】A

【详解】由题意知, $f(x)=\sin \omega x$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=\pi$, 得 $\omega=2$. 故选 A.