三角形费马点的再推广

储炳南

（安徽省合肥市第四中学 230601）

1 问题的提出

1640 年，费尔马提出如下问题："在平面上给出 A、B、C 三点，求一点 P 使距离和 $PA+PB+PC$ 达到最小."这就是数学史上著名的"费尔马问题".特别地，点 A、B、C 三点不共线时，使 $PA+PB+PC$ 最小的点 P 称为$\triangle ABC$ 的费尔马点.

文[1]把费马点问题推广到"两定点、一条定直线"的情形，下面笔者再对"费马点"问题做出如下推广：

推广一 在平面内，已知三条定直线 l_1、l_2、l_3，在平面内求一点 P，使点 P 到直线 l_1、l_2、l_3 的距离之和最小.（不考虑"三线共点和三条直线中有平行直线"的平凡情况）

推广二 在平面内，已知两条定直线 l_1、l_2 和一个定点 A，在平面内求一点 P，使点 P 到直线 l_1、l_2 和点 A 的距离之和 S 最小.（不考虑"点 A 在直线 l_1 或 l_2 上和 $l_2 /\!/ l_2$"的平凡情况）

2 问题的解决

2.1 推广一的解决

设直线 l_1、l_2、l_3 两两相交于不同的三点 A、B、C，且 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，P 点到三条直线 l_1、l_2、l_3 的距离分别为 x、y、z，三角形$\triangle ABC$ 的面积为 S.为了证明的方便，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，

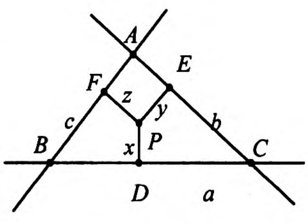

图 1

因为 $\frac{1}{2}(ax+by+cz)=S\Rightarrow x=\frac{2S}{a}-\frac{by}{a}-\frac{cz}{a}$，

所以 $x+y+z=\frac{2S}{a}-\frac{by}{a}-\frac{cz}{a}+y+z$

$$=\frac{2S}{a}+\left(1-\frac{b}{a}\right)y+\left(1-\frac{c}{a}\right)z;$$

因为 $a\geqslant b\geqslant c$，所以 $1-\frac{b}{a}\geqslant 0$，$1-\frac{c}{a}\geqslant 0$，

所以 $x+y+z=\frac{2S}{a}+\left(1-\frac{b}{a}\right)y+\left(1-\frac{c}{a}\right)z$

$$\geqslant\frac{2S}{a},$$

"="当且仅当 $y=z=0$ 时成立，即此时点 P 与点 A 重合.所以当平面上三条直线 l_1、l_2、l_3 两两相交于三个不同的点 A、B、C 时，点 P 到 l_1、l_2、l_3 的距离之和的最小值恰为$\triangle ABC$ 的最长边上的高，并且最小值在点 P 与最长边所对的顶点重合时取得.

2.2 推广二的解决

设两条定直线 EF 与 MN 相交于点 O，定点为 A，下面笔者根据 EF 和 MN，以及定点 A 的相对位置进行分类求解 S 取得最小值时的最优点.

情形一 点 A 在两直线 EF 和 MN 所成的钝角区域内（只需考虑点 A 在$\angle MOE$ 内部的情形，点 A 在$\angle FON$ 内部的情形同理可证.）过点 O 分别作直线 EF、MN 垂直的射线 OG、OH，将$\angle MOE$ 内部分成三个区域，即$\angle HOE$ 内部，$\angle HOG$ 内部，$\angle GOM$ 内部，下面分三种情况：

设点 P 是平面内任意一点，过点 P 作 $PB\perp MN$，$PC\perp EF$，垂足分别为 B，C，则 $S=PA+PB+PC$.

(1)当点 A 在$\angle HOE$ 内部（如图 2 中阴影部分，包括边界）时，过 A 点作 MN 的垂线 AQ，垂足为 Q，此时 AQ 与 EF 必相交，记交点为 P_0，则当 P 点与 P_0 重合时，S 取得最小值为 AQ，证明如下：

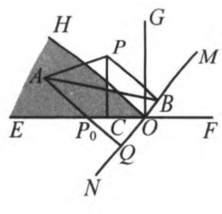

图 2

$$S=PA+PB+PC\geqslant PA+PB\geqslant AB\geqslant AQ,$$

"="当且仅当 P 与 P_0 重合时成立.

万方数据

(2)当点 A 在$\angle GOM$ 内部(如图 3 中阴影部分,包括边界)时,过 A 点作 EF 的垂线 AQ,垂足为 Q,此时 AQ 与 MN 必相交,记交点为 P_0,同理可证明当 P 点与 P_0 重合时,S 取得最小值为 AQ.

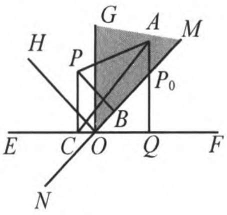

图 3

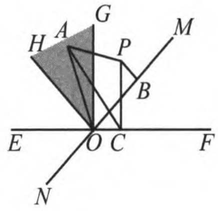

图 4

(3)当点 A 在$\angle HOG$ 内部(如图 4 中阴影部分,包括边界)时,下面证明此时 O 点即为最优点,S 的最小值为 AO.

①当点 P 在$\angle GOM$ 内部(包括边界)时,如图 4 所示,由于$\angle AOC \geqslant \angle GOC=90°$,
所以 $AC \geqslant AO$.
而 $S=PA+PB+PC \geqslant PA+PC \geqslant AC \geqslant AO$,
即 $S \geqslant AO$.

②当点 P 在$\angle HOE$ 内部(包括边界)时,如图 5 所示,类似①,可证:$S \geqslant AO$.

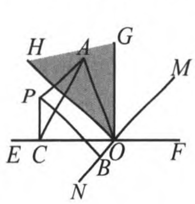

图 5

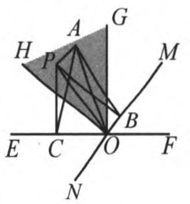

图 6

③当点 P 在$\angle HOG$ 内(如图 6 所示)时,
因为$\angle POB+\angle POC>90°$,
所以 $90°>\angle POB>90°-\angle POC>0°$,
所以 $\sin\angle POB>\sin(90°-\angle POC)=\cos\angle POC$,
所以 $S=PA+PB+PC$

$$=PA+PO(\sin\angle POB+\sin\angle POC)$$

$$>PA+PO(\cos\angle POC+\sin\angle POC).$$

因为$\angle POC$ 为锐角,
所以 $\cos\angle POC+\sin\angle POB>1$,
所以 $S>PA+PO(\cos\angle POQ+\sin\angle POQ)$

$$\geqslant PA+PO \geqslant AO,$$

即 $S>AO$. 故无解.

④当点 P 在$\angle MOF$(或$\angle EON$)内部(包括边界)(如图 7 所示)时,

$$S=PA+PB+PC \geqslant PA+PC \geqslant AC \geqslant AO.$$

综上可知:当点 P 与点 O 重合时,S 取得最小值.

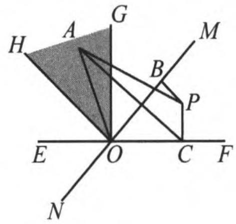

图 7

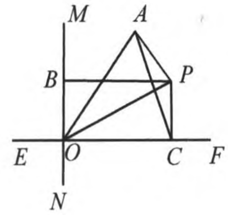

图 8

情形二 若直线 EF 与 MN 的夹角为直角时(如图 8 所示)

设 P 是平面内不同于 O 的任意一点,过点 P 作 MN、EF 的垂线,垂足分别为 B、C.
因为 $S=PA+PB+PC \geqslant PA+PO \geqslant AO$,
所以当点 P 与点 O 重合时,S 取得最小值.

情形三 点 A 在两直线 EF 和 MN 所成的锐角区域内时,过点 A 分别作 MN,EF 的平行线,交 EF、MN 于点 G、H(如图 9 所示).

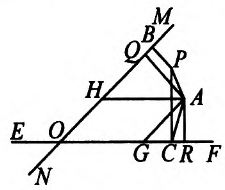

图 9

下面首先证明最优点 P 应在平行四边形 $OGAH$ 内.

若点 P 在平行四边形 $OGAH$ 边 AH 的上方的区域内,如图 9 所示,过 A、P 分别作 EF 的垂线,垂足分别为 R、C,又过 A、P 分别作 MN 的垂线,垂足分别为 Q、B.
因为 $PC>AR$,且 $PA+PB \geqslant AQ$,
所以 $PA+PB+PC \geqslant AQ+PC \geqslant AQ+AR$,
所以,P 点没有 A 点好,即点 P 不会在 AH 的上方的区域内. 同理可证,点 P 不会在 AG 右边的区域内.

下面再证明点 P 不会在直线 EF 的下方.

当 P 点在 EF 下方时,过点 P 作 $PB \perp MN$,$PC \perp EF$,垂足分别为 B,C. 过点 C 作 $CD \perp MN$,垂足为 D. 如图 10 所示.

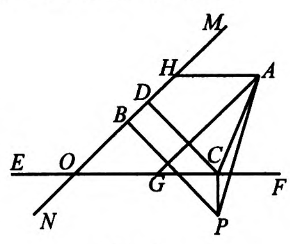

图 10

因为 $PA+PC>AC$,$PB>CD$,
所以 $PA+PB+PC>AC+CD$,
所以 P 不可能在 EF 的下方.

万方数据

同理可得 P 不可能在 MN 的左边，所以 P 点的最优点只可能在平行四边形 $OGAH$ 内部的区域.

(1)当 $\angle FOM<60^\circ$ 时，P 点最优点为点 A(如图 11 所示)，证明如下：

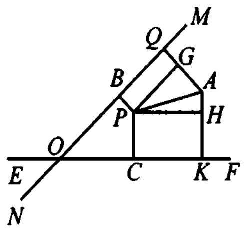

图 11

在平面内任意取不同于点 A 的一点 P，过点 A 分别作 EF、MN 的垂线，垂足分别为 K、Q，又过点 P 分别作 AQ、AK 的垂线，垂足分别为 G、H，记 PA 与 EF 的夹角 $\angle APH=\alpha$，PA 与 MN 的夹角 $\angle APG=\beta$，则 P 点到 MN、EF 和点 A 的距离和为：

$$\begin{aligned}S&=PA+PB+PC=PA+GQ+HK\\&=PA+AQ+AK-AG-AH\\&=PA+AQ+AK-PA(\sin\alpha+\sin\beta)\\&=PA+AQ+AK-PA\times 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\end{aligned}$$

因为 $0^\circ<\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\angle FOM}{2}<30^\circ,-30^\circ<\frac{\alpha-\beta}{2}<30^\circ$，

$$\begin{aligned}\text{所以 } S&=PA+AQ+AK-PA\times 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&>PA+AQ+AK-PA\times 2\sin 30^\circ\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&>PA+AQ+AK-PA=AQ+AK,\end{aligned}$$

所以，P 点没有 A 点好，即 A 点为最优点.

(2)当 $\angle FOM=60^\circ$ 时，记 $\angle FOM$ 的平分线为 OX，不妨设点 A 在 OX 的上方(包括 OX)，过点 A 作 OX 的平行线，交 MN 于点 T，可证明 AT 上任意一点均为最优点(如图 12 所示).

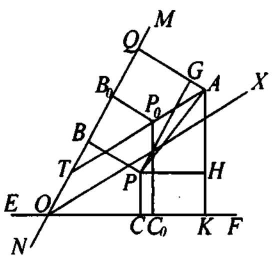

图 12

证明如下：

过点 A 分别作 EF、MN 的垂线，垂足分别为 K、Q，又过点 P 分别作 AQ、AK 的垂线，垂足分别为 G、H，记 $\angle APH=\alpha$，$\angle APG=\beta$，

$$\begin{aligned}S&=PA+PB+PC=PA+GQ+HK\\&=PA+AQ+AK-AG-AH\\&=PA+AQ+AK-PA(\sin\alpha+\sin\beta)\\&=PA+AQ+AK-PA\times 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\end{aligned}$$

因为 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\angle FOM}{2}=30^\circ,-30^\circ<\frac{\alpha-\beta}{2}<30^\circ$，

$$\begin{aligned}\text{所以 } S&=PA+AQ+AK-PA\times 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&=PA+AQ+AK-PA\times 2\sin 30^\circ\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&\geqslant PA+AQ+AK-PA=AQ+AK.\end{aligned}$$

“=”当且仅当 $\alpha=\beta$ 时成立，由 $\alpha=\beta$ 可知此时点 P 在 AT 上，所以，AT 上任意一点均为最优点.

(3)当 $\angle FOM>60^\circ$ 时，设 $\angle AOF=\alpha$，$\angle AOM=\beta$，$\angle POA=\theta(\theta<\min\{\alpha,\beta\})$，

因为 $\alpha+\beta=\angle FOM\in(60^\circ,90^\circ)$，

所以 α、β 中至少有一个不小于30°，

不妨设 $\alpha\geqslant\beta$，所以 $\alpha>30^\circ$，

下面对 β 进行分类加以证明：

①当 $\beta\geqslant 30^\circ$ 时，作点 A 关于 EF 和 MN 的对称点 A' 和 A''，再分别过点 A' 和 A'' 作 MN 和 EF 的垂线，垂足为 H、G，过点 P 作 OA 的垂线，垂足为 K (如图 13 所示).

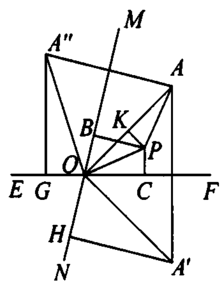

图 13

因为 $\angle MOA'=2\alpha+\beta>90^\circ$，所以垂足 H 在 ON 上，同理可证垂足 G 在 OE 上. 此时，P 点的最优点为点 O，证明如下：

因为 $\theta<\min\{\alpha,\beta\}$，则 $\beta+\theta$ 与 $\alpha-\theta$ 均为锐角，

$$\begin{aligned}S&=PA+PB+PC\\&=PA+OP[\sin(\beta+\theta)+\sin(\alpha-\theta)]\\&\geqslant AK+OP[\sin(\beta+\theta)+\sin(\alpha-\theta)].\end{aligned}$$

因为 $\alpha>30^\circ$，$\beta\geqslant 30^\circ$，

$$\begin{aligned}\text{所以 } S&>AK+OP[\sin(30^\circ+\theta)+\sin(30^\circ-\theta)]\\&=AK+OP\cos\theta=OA.\end{aligned}$$

所以 O 点为最优点.

② 当 $\beta<30^\circ$ 时，如果 $\angle FOA''=\alpha+2\beta\geqslant 90^\circ$，即过 A'' 作 EF 的垂线，垂足为 G 在 OE 上. 过点 P 作 OA 的垂线，垂足为 K (如图 14 所示).

万方数据

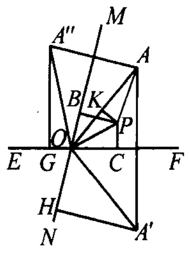

图 14

(i)当点 P 在 $\angle AOF$ 内部(如图 14 所示)时,

由 $\alpha+2\beta\geqslant 90^{\circ}\Rightarrow\alpha\geqslant 90^{\circ}-2\beta$

$$\Rightarrow 90^{\circ}>\alpha-\theta\geqslant 90^{\circ}-2\beta-\theta>0$$

$$\Rightarrow\sin(\alpha-\theta)\geqslant\sin(90^{\circ}-2\beta-\theta)$$

$$\Rightarrow\sin(\alpha-\theta)\geqslant\cos(2\beta+\theta),$$

$$\begin{aligned}S&=PA+PB+PC=PA+OP[\sin(\beta+\theta)+\sin(\alpha-\theta)]\\&>AK+OP[\sin(\beta+\theta)+\cos(2\beta+\theta)]\\&=AK+OP[\sin(\beta+\theta)+\cos(2\beta+\theta)-\cos\theta+\cos\theta]\\&=AK+OP[\sin(\beta+\theta)-2\sin\beta\sin(\beta+\theta)+\cos\theta]\\&=AK+OP[\sin(\beta+\theta)(1-2\sin\beta)+\cos\theta].\end{aligned}$$

因为 $\beta<30^{\circ}$, $\theta<\min\{\alpha,\beta\}$,

所以 $\sin(\beta+\theta)(1-2\sin\beta)+\cos\theta>\cos\theta$,

所以 $S>AK+OP[\sin(\beta+\theta)(1-2\sin\beta)+\cos\theta]$

$$>AK+OP\cos\theta=AK+OK=OA.$$

(ii)当点 P 在 $\angle AOM$ 内部(如图 15 所示)时,

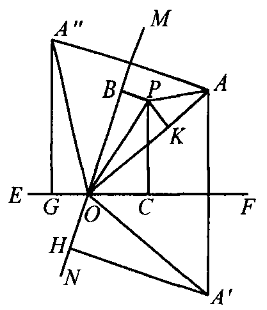

图 15

由 $\alpha+2\beta\geqslant 90^{\circ}\Rightarrow\alpha\geqslant 90^{\circ}-2\beta$

$$\Rightarrow 90^{\circ}>\alpha+\theta\geqslant 90^{\circ}-2\beta+\theta>0$$

$$\Rightarrow\sin(\alpha+\theta)\geqslant\sin(90^{\circ}-2\beta+\theta)$$

$$\Rightarrow\sin(\alpha+\theta)\geqslant\cos(2\beta-\theta),$$

$$\begin{aligned}S&=PA+PB+PC=PA+OP[\sin(\beta-\theta)+\sin(\alpha+\theta)]\\&>AK+OP[\sin(\beta-\theta)+\cos(2\beta-\theta)]\\&=AK+OP[\sin(\beta-\theta)+\cos(2\beta-\theta)-\cos\theta+\cos\theta]\\&=AK+OP[\sin(\beta-\theta)-2\sin\beta\sin(\beta-\theta)+\cos\theta]\\&=AK+OP[\sin(\beta-\theta)(1-2\sin\beta)+\cos\theta].\end{aligned}$$

因为 $\beta<30^{\circ}$, $\theta<\min\{\alpha,\beta\}$,

所以 $\sin(\beta-\theta)(1-2\sin\beta)+\cos\theta>\cos\theta$,

所以 $S>AK+OP[\sin(\beta-\theta)(1-2\sin\beta)+\cos\theta]$

$$>AK+OP\cos\theta=AK+OK=OA.$$

③当 $\beta<30^{\circ}$时,如果 $\angle FOA''=\alpha+2\beta<90^{\circ}$ 即过 A'' 作 EF 的垂线,垂足为 G 在 OF 的上.设 $A''G$ 与 MN 交点为 P_0,则点 P_0 为最优点.证明如下:

过点 P_0 作 PC 的垂线,垂足为 R(如图 16 所示).

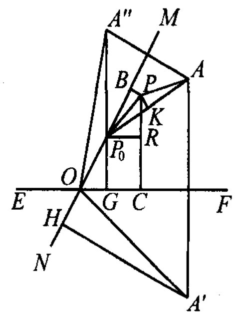

图 16

设 $\angle AP_0R=\alpha'$, $\angle AP_0M=\beta'$, $\angle AP_0P=\theta'$,

因为 $\alpha'+\beta'=\angle AP_0R+\angle AP_0M$

$$=\angle MP_0R=\angle MOF>60^{\circ},$$

故 α'、β' 中至少有一个大于30°,不妨设 $\alpha'>30^{\circ}$.

又因为 $\alpha'+2\beta'=90^{\circ}$,所以 $\beta'<30^{\circ}$;

由 $\alpha'+2\beta'=90^{\circ}\Rightarrow\alpha'+\theta'=90^{\circ}-2\beta'+\theta'$

$$\Rightarrow\sin(\alpha'+\theta')=\sin(90^{\circ}-2\beta'+\theta')$$

$$\Rightarrow\sin(\alpha'+\theta')=\cos(2\beta'-\theta'),$$

所以 $PA+PB+PR$

$$\begin{aligned}&=PA+P_0P[\sin(\beta'-\theta')+\sin(\alpha'+\theta')]\\&=PA+P_0P[\sin(\beta'-\theta')+\cos(2\beta'-\theta')]\\&=PA+P_0P[\sin(\beta'-\theta')+\cos(2\beta'-\theta')-\cos\theta'+\cos\theta']\\&=PA+P_0P[\sin(\beta'-\theta')-2\sin(\beta'-\theta')\sin\beta'+\cos\theta']\\&=PA+P_0P[\sin(\beta'-\theta')(1-2\sin\beta')+\cos\theta']\\&>PA+P_0P\cos\theta'=P_0A=P_0A'',\end{aligned}$$

即 $PA+PB+PR>P_0A''$,

所以 $S=PA+PB+PC$

$$=PA+PB+PR+RC>P_0A''+P_0G$$

$$=A''G,$$

所以点 P_0 为最优点.

参考文献

[1]储炳南.三角形“费马点”的一个推广[J].中学数学教学,2006,10

万方数据