仪征中学数学小练 27

一、选择题（本大题共 3 小题，共 15.0 分）

1. 下列五个写法：①$\{0\}\in\{1，2，3\}$；②$\emptyset\subseteq\{0\}$；③$\{0，1，2\}\subseteq\{1，2，0\}$；④$0\in\emptyset$；⑤$0\cap\emptyset=\emptyset$，其中错误写法的个数为（）

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 若偶函数$f(x)$在（-∞，-1]上是增函数，则（　　）

   A. $f(-1.5)<f(-1)<f(2)$　　B. $f(-1)<f(-1.5)<f(2)$

   C. $f(2)<f(-1)<f(-1.5)$　　D. $f(2)<f(-1.5)<f(-1)$

3. 若f（x）=lg（x^2-2ax+1+a）在区间（-∞，1]上递减，则 a 的取值范围为（　　）

   A. $[1,2)$　　B. $[1,2]$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

二、填空题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

4. 若集合 $M=\{x|x^2+x-6=0\}$，$N=\{x|ax+2=0，a\in R\}$，且 $N\subseteq M$，则 a 的取值的集合为______．

5. 若函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1(x>0)\\3^x(x\leq 0)\end{cases}$，方程$f(x)=m$有两解，则实数 m 的取值范围为______．

6. 函数f（x）=$\begin{cases}x^2-2，x\leq 0\\2x-6+lnx，x>0\end{cases}$的零点个数是______．

7. 已知点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，点 A 的坐标为（-2，0），O 为原点，则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$的最大值为______.

8. 在函数①$y=\cos|2x|$，②$y=|\cos x|$，③$y=cos(2x+\frac{\pi}{6})$，④$y=tan(2x-\frac{\pi}{4})$中，最小正周期为π的所有函数为______．（请填序号）

9. 若定义在 R 上的函数 f（x），其图象是连续不断的，且存在常数λ（$\lambda\in R$）使得 f（x＋λ）＋λf（x）＝0 对任意实数 x 都成立，则称 f（x）是一个“λ～特征函数”．则下列结论中正确命题序号为________.

   ①f（x）＝0 是常数函数中唯一的“λ～特征函数”；

   ②f（x）＝2x－1 不是“λ～特征函数”；

   ③“$\frac{1}{3}$～特征函数”至少有一个零点；

   ④f（x）＝e^x是一个“λ～特征函数”．

三、解答题（本大题共 3 小题，共 36.0 分）

10. 计算：

   （1）$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$+（0.008）$^{\frac{1}{3}}$-（0.25）$^{\frac{1}{2}}$×（$\frac{1}{\sqrt{2}}$）$^{-4}$

   （2）（$\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3}$）^{6}+（$\sqrt{2\sqrt{2}}$）$^{\frac{4}{3}}$-4（$\frac{16}{49}$）$^{-\frac{1}{2}}$-$\sqrt[4]{2}$×$8^{0.25}$-（-2009）^{0}.

11．已知函数f（x）=2cos$x$（sin$x$+cos$x$）．

（Ⅰ）求f（$\frac{5\pi}{4}$）的值；

（Ⅱ）求函数f（x）的最小正周期及单调递增区间．

12．已知函数$f(x)=2cos(x-\frac{\pi}{3})+2sin(\frac{3\pi}{2}-x)$

（1）求函数f（x）的单调递减区间．

（2）求函数f（x）的最大值，并求f（x）取得最大值时的x的集合．

（3）若$f(x)=\frac{6}{5}$，求$cos(2x-\frac{\pi}{3})$的值．

答案和解析

1.【答案】C
【解析】

【分析】

本题考查集合部分的一些特定符号、一些特殊的集合、集合中元素的三要素.

据“$\in$”于元素与集合;“$\cap$”用于集合与集合间;判断出①⑤错,$\varnothing$是不含任何元素的集合且是任意集合的子集判断出②④的对错;据集合元素的三要素判断出③对

【解答】

解:对于①,“$\in$”是用于元素与集合的关系故①错;

对于②,$\varnothing$是任意集合的子集,故②对;

对于③,集合中元素的三要素有确定性、互异性、无序性故③对;

对于④,因为$\varnothing$是不含任何元素的集合故④错;

对于⑤,因为$\cap$是用于集合与集合的关系的,故⑤错;

故选 C.

2.【答案】D
【解析】

【分析】

由函数的奇偶性、单调性把 $f(2)$、$f(-1.5)$、$f(-1)$转化到区间$(-\infty,-1]$上进行比较即可.

本题考查函数的奇偶性、单调性的综合运用,解决本题的关键是灵活运用函数性质把 $f(2)$、$f(-1.5)$、$f(-1)$转化到区间$(-\infty,-1]$上解决.

【解答】

解:因为 $f(x)$在$(-\infty,-1]$上是增函数,

又$-2<-1.5<-1\leq-1$,所以 $f(-2)<f(-1.5)<f(-1)$,

又 $f(x)$为偶函数,所以 $f(2)<f(-1.5)<f(-1)$.

故选 D.

3.【答案】A

【解析】

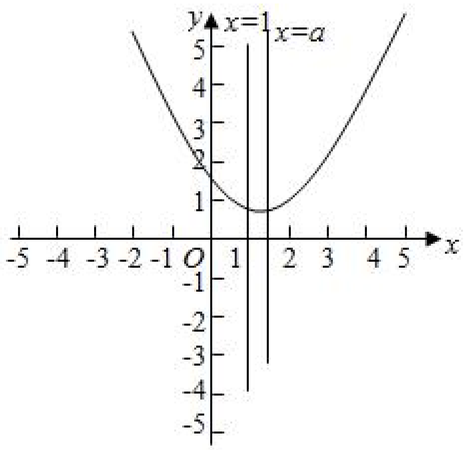
【分析】

由题意，在区间$(-\infty,1]$上，a的取值需令真数$x^2-2ax+1+a>0$，且函数$u=x^2-2ax+1+a$在区间$(-\infty,1]$上应单调递减，这样复合函数才能单调递减．本题考查复合函数的单调性，考查学生分析解决问题的能力，复合函数单调性遵从同增异减的原则．

【解答】

解：令$u=x^2-2ax+1+a$，则$f(u)=\lg u$，

配方得$u=x^2-2ax+1+a=(x-a)^2-a^2+a+1$，故对称轴为$x=a$，如图所示：



由图象可知，当对称轴$a\geq 1$时，$u=x^2-2ax+1+a$在区间$(-\infty,1]$上单调递减，

又真数$x^2-2ax+1+a>0$，二次函数$u=x^2-2ax+1+a$在$(-\infty,1]$上单调递减，

故只需当$x=1$时，若$x^2-2ax+1+a>0$，

则$x\in(-\infty,1]$时，真数$x^2-2ax+1+a>0$，

代入$x=1$解得$a<2$，所以a的取值范围是$[1,2)$

故选：A.

4.【答案】$\{-1,0,\frac{2}{3}\}$

【解析】

【分析】

化简集合M，根据$N\subseteq M$，建立条件关系，根据集合的基本运算即可求a的取

值.

本题主要考查集合的基本运算，比较基础.

【解答】

解：依题意得 $M=\{x|x^2+x-6=0\}=\{-3, 2\}$，$N=\{x|ax+2=0, a\in R\}$，

$\because N\subseteq M$

所以集合 N 可分为$\{-3\}$，$\{2\}$，或$\emptyset$.

①当 $N=\emptyset$时，即方程 $ax+2=0$ 无实根，所以 $a=0$，符合题意；

②当 $N=\{-3\}$时，有-3 是方程 $ax+2=0$ 的根，所以 $a=\frac{2}{3}$，符合题意；

③当 $N=\{2\}$时，有 2 是方程 $ax+2=0$ 的根，所以 $a=-1$，符合题意；

综上所得，$a=0$ 或 $a=\frac{2}{3}$ 或 $a=-1$，所以 a 的取值的集合为$\{-1, 0, \frac{2}{3}\}$.

故答案为：$\{-1, 0, \frac{2}{3}\}$.

5.【答案】$0<m<2$

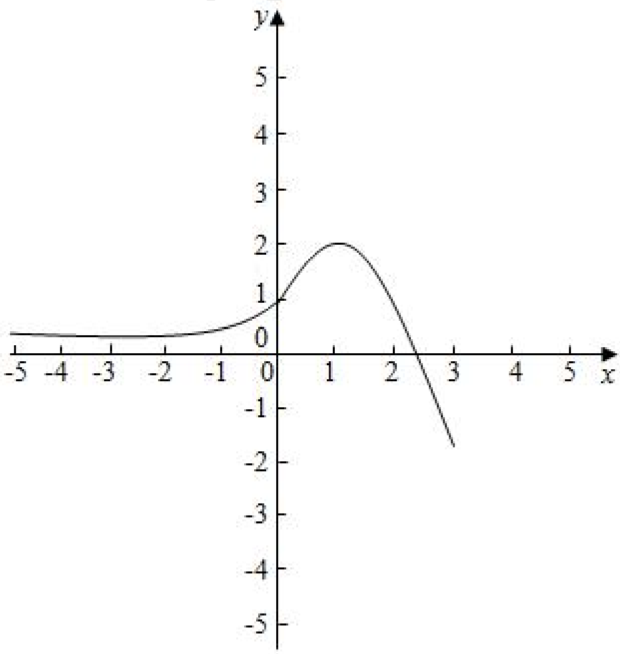
【解析】

【分析】本题利用分段函数考查函数零点个数问题。利用数形结合，正确作出函数的图象是关键.

作出函数

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1(x>0)\\ 3^x(x\leq 0)\end{cases}$$

的图象，利用方程 f(x)=m 有两解，即可实数 m 的取值范围.



【解答】

解：如图所示.

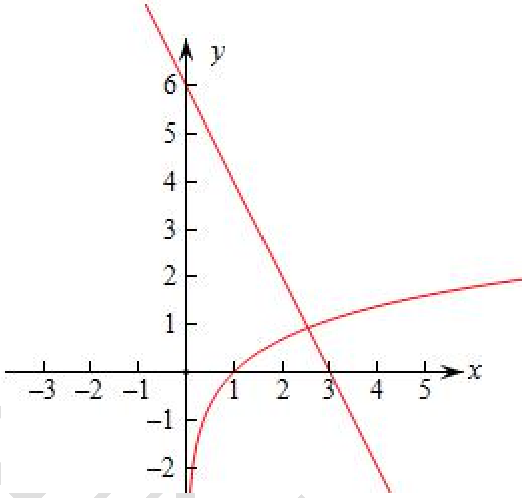
由题意，$x\leq 0$，$0<3^x\leq 1$，$x>0$，$f(x)\leq 2$，

∵方程 f(x)=m 有两解,
∴0<m<2.

故答案为:0<m<2.

6.【答案】2
【解析】

【分析】



本题主要考查函数零点个数的判断,

对于比较好求的函数,直接解方程 f(x)=0 即可,对于比较复杂的函数,

由利用数形结合进行求解.

根据函数零点的定义,直接解方程即可得到结论.

【解答】

解:当 $x\le 0$ 时,由 f(x)=0 得 $x^2-2=0$,解得 $x=-\sqrt{2}$或 $x=\sqrt{2}$(舍去),

当 x>0 时,由 f(x)=0 得 2x-6+lnx=0,即 lnx=6-2x,

作出函数 y=lnx 和 y=6-2x 在同一坐标系图象,由图象可知此时两个函数只有 1 个零点,

故函数 f(x)的零点个数为 2,

故答案为:2

7.【答案】6
【解析】

解:设 P(cosα,sinα).$\overrightarrow{AO}$=(2,0),$\overrightarrow{AP}$=(cosα+2,sinα).

则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$=2(cosα+2)≤6,当且仅当 cosα=1 时取等号.

故答案为:6.

设 P(cosα,sinα).可得 $\overrightarrow{AO}$=(2,0),$\overrightarrow{AP}$=(cosα+2,sinα).利用数量积运算性

质、三角函数的单调性与值域即可得出.

本题考查了数量积运算性质、三角函数的单调性与值域、圆的参数方程，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

8.【答案】①②③
【解析】

解：函数①$y=\cos|2x|=\cos 2x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，

②$y=|\cos x|$的最小正周期为 $\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi$，

③$y=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，

④$y=\tan(2x-\frac{\pi}{4})$的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，

故答案为：①②③.

由条件利用三角函数的周期性，得出结论.

本题主要考查三角函数的周期性，属于基础题.

9.【答案】②③④
【解析】

【分析】

本题考查的知识点是函数的概念及构成要素，函数的零点，正确理解 $f(x)$是λ~特征函数的定义，是解答本题的关键.

利用新定义“λ~特征函数”，对①②③④逐个判断即可得到答案.

【解答】

解：①、设 $f(x)=C$ 是一个“λ~特征函数”，

则$(1+\lambda)C=0$，当$\lambda=-1$ 时，可以取遍实数集，

因此 $f(x)=0$ 不是唯一一个常值“λ~特征函数”，故①错误 ；

②$f(x)=2x-1$

假设 $f(x)=2x-1$ 是一个“λ~特征函数”，

$f(x+\lambda)+\lambda(x)=2(x+\lambda)+1+\lambda(2x+1)=0$，

则 $2(1+\lambda)x=-2\lambda-\lambda$，

当 $\lambda=-1$ 时，$f(x+\lambda)+\lambda(x)=2(x+\lambda)+1+\lambda(2x+1)=-2\neq0$，

当 $\lambda\neq-1$ 时，$f(x+\lambda)+\lambda(x)$ 有唯一解，

所以不存在常数 $\lambda(\lambda\in R)$ 使得 $f(x+\lambda)+\lambda(x)=0$ 对任意实数 x 都成立，所以 $f(x)=2x-1$ 不是“λ~特征函数”；故②正确；

③令 $x=0$，得 $f(\frac{1}{3})+\frac{1}{3}f(0)=0$．所以 $f(\frac{1}{3})=-\frac{1}{3}f(0)$，

若 $f(0)=0$，显然 $f(x)=0$ 有实数根；若 $f(0)\neq0$，$f(\frac{1}{3})\cdot f(0)=-\frac{1}{3}(f(0))^2<0$，

又因为 $f(x)$ 的函数图象是连续不断，所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{3})$ 上必有实数根，

因此任意的“~$\frac{1}{3}$ 特征函数”必有根，即任意“$\frac{1}{3}$~特征函数”至少有一个零点．故③正确．

④假设 $f(x)=e^x$ 是一个“λ~特征函数”，则 $e^{x+\lambda}+\lambda e^x=0$ 对任意实数 x 成立，则有 $e^{\lambda}+\lambda=0$，而此式有解，所以 $f(x)=e^x$ 是“λ~特征函数”，故④正确．

故答案为②③④．

10.【答案】解：（1）$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}+(0.008)^{\frac{1}{3}}-(0.25)^{\frac{1}{2}}\times(\frac{1}{\sqrt{2}})^{-4}$

$=\pi-3+0.2-0.5\times4$

$=\pi-3+0.2-2$

$=\pi-4.8$．

（2）$(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6+(\sqrt{2\sqrt{2}})^{\frac{4}{3}}-4(\frac{16}{49})^{-\frac{1}{2}}-\sqrt[4]{2}\times8^{0.25}-(-2009)^0$

$=4\times27+(2^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}-7-16^{\frac{1}{4}}-1$

$=108+2-7-2-1$

$=100$．

【解析】

本题考查指数式化简求值，是基础题，解题时要认真审题，注意有理数指数幂的性质、运算法则的合理运用.

(1)利用有理数指数幂的性质、运算法则求解.

(2)利用有理数指数幂的性质、运算法则求解.

11.【答案】解：（Ⅰ）∵函数 $f(x)=2\cos x(\sin x+\cos x)=\sin 2x+1+\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$，

∴$f(\frac{5\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{4})+1=\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4}+1=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1=2$.

（Ⅱ）∵函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$，故它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，求得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{8}$，

故函数的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{3\pi}{8}，k\pi+\frac{\pi}{8}]$，$k\in Z$.

【解析】

(Ⅰ)利用三角恒等变换化简函数的解析式为 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$，从而求得 $f(\frac{5\pi}{4})$的值.

(Ⅱ)根据函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$，求得它的最小正周期. 令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，求得 x 的范围，可得函数的单调递增区间.

本题主要考查三角函数的恒等变换，三角函数的周期性和单调性，属于中档题.

12.【答案】解：（1）由题意可得：$f(x)=2cos(x-\frac{\pi}{3})+2sin(\frac{3\pi}{2}-x)$，化简可得 $f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{6})$.

当 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\le x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，即化简可得 $2k\pi+\frac{2\pi}{3}\le x\le 2k\pi+\frac{5\pi}{3}$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[2k\pi+\frac{2\pi}{3}，2k\pi+\frac{5\pi}{3}]$，$(k\in Z)$.

（2）当 $x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 有最大值 2，

并且此时 x 的集合为 $\{x|x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}，k\in Z\}$.

（3）由题意可得：$f(x)=\frac{6}{5}$，即 $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{6}{5}$，所以 $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$.

所以 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{25}$.

【解析】

(1)由题意可得：$f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{6})$. 当 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leq x-\frac{\pi}{6}\leq 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，即化简可得函数的单调减区间.

(2)根据正弦函数的性质可得：当 $x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ 时，函数 f(x) 有最大值.

(3)由题意可得：$2\sin(x-\frac{\pi}{6})=\frac{6}{5}$，所以 $\sin(x-\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$. 再集合二倍角公式可得：$\cos(2x-\frac{\pi}{3})=1-2\sin^2(x-\frac{\pi}{6})=\frac{7}{25}$.

解决此类问题的关键是熟练掌握两角和与差的正弦余弦公式，以及三角函数的有关性质.