随地地调整方向,调整处理的手段,一切视具体情况而定.在求解此类问题时并没有固定的模式,也不能靠“题型 + 方法” 的训练来应对.

纵观这几年的高考试题,大多数的题目是不能通过分离参数转化为求最值的,只能使用分类讨论的逐段筛选法,当然很多事情并不是绝对的,有些高考题是如 2020 年高考全国 Ⅰ 卷理科数学第 21 题第(2) 问,专家给出的标准答案就是用逐段筛选求解的,方法虽然是常规方法,但整个过程冗长,繁杂,生涩,耗时长,计算量大,而用分离变量反客为主的技巧,分离后所得的函数也比较简单,整个求解过程十分简洁优美,只有善于观察、分析与思考,因地制宜,灵活恰当地选择合适的方法和手段,才能顺利求解,这也正是此类问题的魅力所在吧!

参考文献

[1] 石磊,郝明泉,侯典峰.一类恒成立条件下求参数范围导数题的思考与探索模式[J].数学通讯(上半月).2019(9):18-20.

[2] 王玉林.解答一类高考导数压轴题的通法——逐段筛选法[J].中学数学杂志.2013(1):31-34.

[3] 刘金.一类高考题的统一解法[J].数学通讯(上半月).2011(11、12):58-60.

作者简介 侯典峰(1974—),男,黑龙江大兴安岭人,中学高级教师,全国初等数学研究会常务理事,全国不等式研究会理事,第三届全国“中青年初等数学研究奖”获得者,市级重点学科(专业)数学学科后备带头人,市数学学科带头人,市骨干教师,市高中数学学科专家组成员,在省级及以上期刊上发表文章 109 篇.

应用“排序配对法”探求集合封闭性问题

上海市育才中学 201801 **龚新平**

研究很多有穷集合或无穷可数集合运算封闭性问题,我们可以先将其元素由单调性进行大小排序,然后结合极端原理将不同形式的元素依次配对,逐步得到元素之间的等量关系,从而确定集合的元素及其规律,本文将应用这种”排序配对法”探求几道近年相关的高考压轴题.

1.(2009 年北京卷) 数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$($1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n$)具有性质 P:对任意 i,j($1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$),$a_ia_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A,证明:当 $n=5$ 时,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 成等比数列.

证 由 $a_5a_5\notin A$,故 $\frac{a_5}{a_5}=1\in A$,$a_1=1$,由 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$,排序得 $a_1=\frac{a_5}{a_5}<\frac{a_5}{a_4}<\frac{a_5}{a_3}<\frac{a_5}{a_2}<\frac{a_5}{a_1}=a_5$.

由 $a_5a_4,a_5a_3,a_5a_2\notin A$,故 $\frac{a_5}{a_4},\frac{a_5}{a_3},\frac{a_5}{a_2}\in A$,根据大小配对得 $\frac{a_5}{a_4}=a_2,\frac{a_5}{a_3}=a_3,\frac{a_5}{a_2}=a_4$,进而 $a_2a_4=a_3^{\,2}=a_5a_1$,即 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_5}{a_4},\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_3}{a_2}$,又 $a_3a_4\neq a_5$,$a_3a_4\notin A$,$\frac{a_4}{a_3}\in A$,且 $\frac{a_4}{a_3}=a_2$,故 $\frac{a_5}{a_4}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2}{a_1}$,即 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 成等比数列.

2.(2012 年上海卷) 对数集 $X=\{-1,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,其中 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$,$n\geqslant 2$,定义向量集 $Y=\{\boldsymbol{a}\mid \boldsymbol{a}=(s,t),s\in X,t\in X\}$,若对任意 $\boldsymbol{a}_1\in Y$,存在 $\boldsymbol{a}_2\in Y$,使得 $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=0$,则称 X 具有性质 P.若 X 具有性质 P,且 $x_1=1$,$x_2=q$(q 为常数),求有穷数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的通项公式.

解 任取 $\boldsymbol{a}_1=(x_i,x_2)$($i=2,3,\cdots,n$),由题意必存在 $\boldsymbol{a}_2=(-1,b)\in Y$,使得 $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=-x_i+bx_2=0$,故 $b=\frac{x_i}{x_2}\in X$,由单调性排序得 $x_1=\frac{x_2}{x_2}<\frac{x_3}{x_2}<\frac{x_4}{x_2}<\cdots<\frac{x_{n-1}}{x_2}<\frac{x_n}{x_2}<x_n$,故依次等量配对 $\frac{x_k}{x_2}=x_{k-1}$($k=2,3,\cdots,n$),故 $\frac{x_k}{x_{k-1}}=x_2=q$($k=2,3,\cdots,n$),即 $\{x_n\}$ 是等比数列,故有穷数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 通项公式为 $x_n=q^{n-1}$.

3.(2020 年上海卷) 项数为 m($m\geqslant 4$)的有穷数

列$\{a_n\}$满足$|a_2-a_1|\leqslant|a_3-a_1|\leqslant\cdots\leqslant|a_m-a_1|$,则称$\{a_n\}$具有性质$P$,若$\{a_n\}$是$1,2,3,\cdots,m$的一个排列,$\{b_n\}$符合$b_k=a_{k+1}(k=1,2,3,\cdots,m-1)$,$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都具有性质$P$,求所有满足条件的数列$\{a_n\}$.

解　当$a_1=1$,将剩下$m-1$个数与首项的距离从小到大排序得$|2-1|<|3-1|<\cdots<|m-1|$,从而依次等量配对可得$a_2=2,a_3=3,\cdots,a_m=m$,易知此时$\{a_n\}$符合;

当$a_1=2$,同理排序得$|1-2|=|3-2|<|4-2|<\cdots<|m-2|$,故按$a_2,a_3$两种可能情形讨论:

①$a_2=1,a_3=3,a_4=4,\cdots,a_m=m$,符合,②$a_2=3,a_3=1,a_4=4,\cdots,a_m=m$,不符合;

当$a_1=p(p=3,4,\cdots,m-2)$,排序得$|(p-1)-p|=|(p+1)-p|<|(p-2)-p|=|(p+2)-p|<\cdots$,故按$a_2,a_3,a_4,a_5$所有四种可能情形讨论:①$a_2=p-1,a_3=p+1,a_4=p-2,a_5=p+2,\cdots$,

②$a_2=p-1,a_3=p+1,a_4=p+2,a_5=p-2,\cdots$,③$a_2=p+1,a_3=p-1,a_4=p-2,a_5=p+2,\cdots$,④$a_2=p+1,a_3=p-1,a_4=p+2,a_5=p-2,\cdots$,易知上述四种情形$\{a_n\}$均不符合;

当$a_1=m-1$,排序得$|(m-2)-(m-1)|=|m-(m-1)|<|(m-3)-(m-1)|<\cdots<|1-(m-1)|$,同$a_1=2$时讨论情形易得:有且仅有$a_2=m,a_3=m-2,a_4=m-3,\cdots,a_m=1$符合;

当$a_1=m$时,同理排序配对易得$a_2=m-1,a_3=m-2,\cdots,a_m=1$符合;

综上所述,满足条件的数列$\{a_n\}$有且仅有四个:$1,2,3,4,\cdots,m$;$2,1,3,4,\cdots,m$;$m-1,m,m-2,m-3,\cdots,1$;$m,m-1,m-2,m-3,\cdots,1$.

4.(2020年浙江卷)两个集合$S,T\subseteq\mathbf{N}^*$,且至少有2个元素,S,T满足两个条件:①任取$x,y\in S$,且$x\neq y$,则$x\cdot y\in T$;②任取$x,y\in T$,且$x<y$,则$\frac{y}{x}\in S$,则下列说法正确的是(　　).

A.若S有4个元素,则$S\cup T$有7个元素

B.若S有4个元素,则$S\cup T$有6个元素

C.若S有3个元素,则$S\cup T$有5个元素

D.若S有3个元素,则$S\cup T$有4个元素.

解　(1)若S有3个元素,$S=\{a,b,c\}(a<b<c)$,则ab,ac,bc必属于T,又$\frac{ac}{ab}=\frac{c}{b},\frac{bc}{ac}=\frac{b}{a},\frac{bc}{ab}=\frac{c}{a}\in S$,三个比值最大者$\frac{c}{a}$有两种情形:①若$\frac{c}{a}=c$,则$a=1,S=\{1,b,c\}$,由$1<\frac{c}{b}<c$,故$\frac{c}{b}=b$,即$S=\{1,b,b^2\},T=\{b,b^2,b^3\},S\cup T=\{1,b,b^2,b^3\}$;②若$\frac{c}{a}=b$,则$c=ab,S=\{a,b,c\}(a>1)$,由$\frac{b}{a}<b$,故$\frac{c}{b}=\frac{b}{a}=a$,即$b=a^2,c=a^3$,即$S=\{a,a^2,a^3\}$,$a^3,a^4,a^5\in T$,但另有$y\in T$,使$\frac{y}{ab}=c$或$\frac{bc}{y}=c$,故$y=a^2$或$y=a^6$,即$T=\{a^2,a^3,a^4,a^5\}$或$T=\{a^3,a^4,a^5,a^6\}$,故$S\cup T=\{a,a^2,a^3,a^4,a^5\}$或$S\cup T=\{a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6\}$;

(2)若S有4个元素,设$S=\{a,b,c,d\}(a<b<c<d)$,则$ab<ac<ad,bc<bd<cd$且均属于T,考虑比值最大者$\frac{cd}{ab}=\frac{1}{a}\left(\frac{c}{b}\right)d\in S$,当$a=1$时显然矛盾,故必有$a>1$,而至少四个不同比值中的最大者$\frac{cd}{ab}$必等于$d$,所以$c=ab$,不同比值中最小者$\frac{b}{a}$必等于$a$,所以$b=a^2$,故而由单调性排序得$\frac{d}{c}<\frac{d}{b}<\frac{d}{a}<d$,且均属于$S$,依次等量配对得$\frac{d}{c}=a,\frac{d}{b}=b,\frac{d}{a}=c$,所以$S=\{a,a^2,a^3,a^4\},T=\{a^3,a^4,a^5,a^6,a^7\},S\cup T=\{a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,a^7\}$.综上所述,答案选A.

5.(2020年北京卷)若$\{a_n\}$是无穷数列,给出两个性质:①对$\{a_n\}$中任意两项$a_i,a_j(i>j)$,在$\{a_n\}$中都存在一项a_m,使得$\frac{a_i^2}{a_j}=a_m$;②对$\{a_n\}$中任意一项$a_n(n\geqslant3)$,在$\{a_n\}$中都存在两项$a_k,a_l(k>l)$,使得$a_n=\frac{a_k^2}{a_l}$.若$\{a_n\}$是递增数列,且同时满足性质①和②,证明:$\{a_n\}$是等比数列.

证　若$\{a_n\}$中正项负项都有,不妨设$a_1<a_2<\cdots<a_k<0<a_{k+1}<a_{k+2}<\cdots$,由于无穷多个不同负项$\frac{a_i^2}{a_1}(i>k)$必在$\{a_n\}$中,显然矛盾,故$\{a_n\}$中所有项必同号.无论$\{a_n\}$各项都为正数或都为负数,都可以对所有$\{a_n\}$中的项$\frac{a_i^2}{a_j}(i>j)$依单调性排序得到如下列表:

$$a_2<\frac{a_2^2}{a_1}$$

$$a_3<\frac{a_3^2}{a_2}<\frac{a_3^2}{a_1}$$

$$a_4<\frac{a_4^2}{a_3}<\frac{a_4^2}{a_2}<\frac{a_4^2}{a_1}$$

$$a_5<\frac{a_5^2}{a_4}<\frac{a_5^2}{a_3}<\frac{a_5^2}{a_2}<\frac{a_5^2}{a_1}$$

$$a_6<\frac{a_6^2}{a_5}<\frac{a_6^2}{a_4}<\frac{a_6^2}{a_3}<\frac{a_6^2}{a_2}<\frac{a_6^2}{a_1}$$

$$a_7<\frac{a_7^2}{a_6}<\frac{a_7^2}{a_5}<\frac{a_7^2}{a_4}<\frac{a_7^2}{a_3}<\frac{a_7^2}{a_2}<\frac{a_7^2}{a_1}$$

……

由题意知该列表能遍历数列$\{a_n\}$中的每一项,由第一行知必有$\frac{a_2^2}{a_1}=a_3$,由第二行知必有$\frac{a_3^2}{a_2}=a_4$,所以$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}$,即前四项依次等比,设$\frac{a_2}{a_1}=q$则$a_n=a_1q^{n-1}(n=1,2,3,4)$,记$\left(\frac{a_4^2}{a_3},\frac{a_3^2}{a_1}\right)$为第一斜行,$\left(\frac{a_5^2}{a_4},\frac{a_4^2}{a_2}\right)$为第二斜行,$\left(\frac{a_6^2}{a_5},\frac{a_5^2}{a_3},\frac{a_4^2}{a_1}\right)$为第三斜行,$\left(\frac{a_7^2}{a_6},\frac{a_6^2}{a_4},\frac{a_5^2}{a_2}\right)$为第四斜行,依次类推……,由于$\frac{a_3^2}{a_1}=\frac{(a_1q^2)^2}{a_1}=a_1q^4$,$\frac{a_4^2}{a_3}=\frac{(a_1q^3)^2}{a_1q^2}=a_1q^4$,故第一斜行的两数相等,由题意知第一斜行相等两数必为a_5,故$a_5=a_1q^4$.以下用数学归纳法证明$a_n=a_1q^{n-1}(n\geqslant5,n\in\mathbf{N}^*)$都成立.①$n=5$,$a_5=a_1q^{5-1}$结论成立;②假设$n\leqslant k$,$a_k=a_1q^{k-1}$成立,即第$k-4$斜行中的每数$\frac{a_{k-1}^2}{a_{k-2}}=\frac{a_{k-2}^2}{a_{k-4}}=\frac{a_{k-3}^2}{a_{k-6}}=\cdots=qa_{k-1}=a_k$,接下来考虑第$k-3$斜行中各数发现:$\frac{a_k^2}{a_{k-1}}=\frac{(a_1q^{k-1})^2}{a_1q^{k-2}}=a_1q^k$,$\frac{a_{k-1}^2}{a_{k-3}}=a_1q^{2(k-2)-(k-4)}=a_1q^k,\cdots,\frac{a_{k-i}^2}{a_{k-(2i+1)}}=a_1q^{2(k-i-1)-(k-(2i+1)-1)}=a_1q^k,\cdots$,即每项都相等,由题意知该斜行的相等各数必都等于$\{a_n\}$的下一项$a_{k+1}$,且$a_{k+1}=a_1q^k$,即当$n=k+1$时结论也成立.综上所述$a_n=a_1q^{n-1}$对任意正整数$n$都成立,所以数列$\{a_n\}$是等比数列.

结语点评 应用“排序配对法”解决集合运算封闭性问题时,如何根据条件构造元素的排序不等式链从而依次配对确定集合的元素是探求问题非常关键的步骤,有时构造的方式不惟一,如2012年上海高考题中构造的不等式链是在反复斟酌后找到的相对简单而直接的解题途径、2020年浙江高考题中如何全面地排序配对确定元素个数是对学生的数学思维严谨性与灵活性的高水平考查、2020年北京高考题中通过构造“斜行”的概念来实现不同元素的等量配对,从而确定集合元素的关系,结合数学归纳法实现等比数列的证明,这种方法浅显易懂、形象直观、深入浅出,也是一种严谨的逻辑推理的好方法.这种“排序配对法”在各类自主招生和数学竞赛中也有不同应用,欢迎读者们去发现、去探究.

作者简介 龚新平(1977—),男,籍贯:湖北.数学高级教师,学科带头人,获上海市静安区“教育园丁”称号,2000年7月毕业于上海市华东师范大学数学系,同年任职于上海市育才中学至今,多年任教高三数学,近年来发表教育教学论文40余篇.