高中数学建模教学的实践①

——以“学校无线信号发射器安装方案”为例

李现勇

（青岛市教育科学研究院　266001）

2003 年教育部颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》将数学建模纳入其中，要求把数学建模的思想渗透在各模块内容之中，并在高中阶段至少安排一次数学建模活动[2]，这是数学建模进入高中教学的一个重要标志.《普通高中数学课程标准(2017 年版)》(以下简称《标准》)更是将“数学建模”列为六大核心素养之一，在必修课程、选择性必修课程和选修课程中均对数学建模活动作出了具体的内容要求，在核心素养的水平划分中列出了数学建模素养三个水平层级的详细指标.

然而作为应用数学解决实际问题的重要手段，了解与掌握数学建模已成为当下数学教育教学所面临的新课题. 目前高中生的数学建模水平普遍较低，能够真正有效开展数学建模活动的学校并不多，教师也普遍不具备这方面的教学能力. 因此，在新的时代背景下，高中教师有必要探讨如何进行数学建模的教学活动，积累教学实践经验.

1　数学建模的特点

《标准》中对建模的表述如下：数学建模活动是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的过程. 主要包括：在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、构建模型，确定参数、计算求解，检验结果、改进模型，最终解决实际问题[4].

数学建模的意义不言而喻. 从学习的内容上，它是学生对多学的数学基本知识、基本技能、基本思想方法与基本活动经验的认知与夯实，理解与掌握的复习巩固，与《标准》中有关数学课程目标要求一致；从学习的方式上，它需要学生查阅资料、合作讨论、创新思考、现场考察、计算机模拟等，完全符合《标准》所倡导的自主、合作、探究的学习方式；从学习的结果上，它能够让学生意识到数学在解决实际问题中的重大作用，培养创新精神和实践能力，最终转化为未来发展所需要的核心素养.

2　数学建模教学的实施

高中阶段的数学建模是初等的，依赖于学生所掌握的数学知识，但尽管如此，建模的过程并不容易，困难的原因主要有以下几点：对身边实际生产生活等社会问题的关注与兴趣不浓；与数学有关及周边相关领域的知识、技能及思想等“硬件”储备不够完备；数学的观察力与洞察力等“软件”敏锐度不高；问题情境是“模糊”的，已知条件、目标问题需要学生自己来“自问自答”；建构什么样的模型，设定什么样的参数，需要经验的积累；求解的方式很多，答案不是唯一的，经过实际检验后，往往需要对自己的模型作出评估、改进. 总之，从问题到求解再到结果，整个过程开放度很大，与传统的数学解题存在着巨大差异.

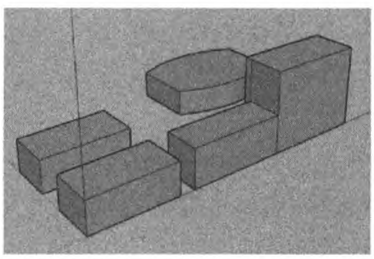
2.1　问题引入

教师需要向学生介绍什么是数学建模，让学生在理论上有一定的认识，明确数学建模的具体步骤. 在介绍过程中，应尽量贴近学生的生活，激发学生的兴趣. 还可以选取恰当的数学建模实例，进行改进、对比，让学生体会数学建模不同于传统数学解题的特点.

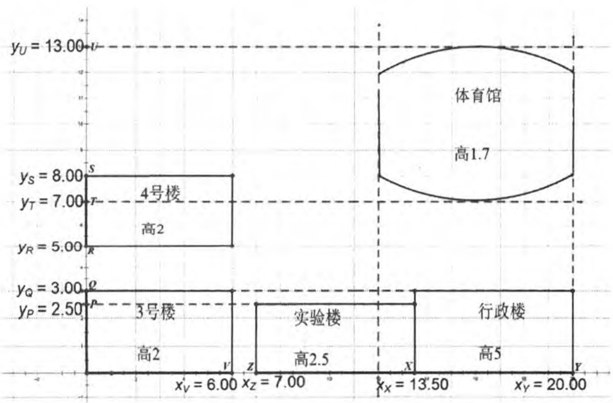
师：今天我们一起来探究解决一个关于咱们学校的实际问题. 2020 年我们学校将承办全国大学生运动会的部分项目，为了给运动会提供通讯

① 青岛市教育科学“十三五”规划 2019 年度课题～基于数学建模素养的高中数学课堂教学实践研究(课题批准号 QJK135C942)阶段性研究成果.

支持，需要在我校行政楼，实验楼，3号4号教学楼以及体育馆内架设无线网络通讯系统．要求信号完全覆盖于上述区域．前期，我们已经完成了数据的搜集工作，以下是根据我们搜集到的数据得到的我们学校优化后的三维模型，请大家先看一下．（三维模型展示）



师：通过刚才的三维模型，我们对学校的这几栋建筑从直观上有了整体的把握，将刚才的三维模型落到平面内后，对数据进行适当的优化处理，得到平面模型，请大家根据模型思考，我们今天要解决的这个问题中，信号完全覆盖上述区域，如果抽象成数学当中的知识，应该和哪一部分知识相关联？



生：外接球．

师：是什么几何体的外接球？

生：长方体．

2.2　初步尝试

初步尝试阶段，教师可以给出相对明确的问题情境与约束条件（尽可能理想化），选择相对简单的方法，涉及相对较少的参数，便得到的结果便于分析．这主要是为了使学生容易上手，从而树立信心激发兴趣．

师：回到我们今天的问题当中，要探究出成本怎样才能达到最优，需要从哪些角度来考虑成本呢？首先我们来看一下产品的报价．以下是某公司针对我校内部网络通讯系统给出的该公司产品的报价：

项目名称：校园内部网络通讯系统安装项目

产品型号	最大覆盖半径	报价
CRN—40	40m	2000
CRN—50	50m	2000
CRP—60	60m	3000
CRP—75	75m	4550
CRP—80	80m	5050
CRP—100	100m	7000

师：请大家根据价格表中该公司现有产品的价格，分析一下该公司的产品价格主要受哪些因素的影响？如何影响？如果我们现在对产品有特定的需求，比如说我们对半径的要求发生变化，那他们给出的价格大约应该是多少？

生2：表格当中给出的是半径和价格之间的关系，通过表格数据可知，半径和价格大致应该是线性的关系．当覆盖范围小于50米的时候，价格没有变化，都是2000；当价格大于50米时价格开始产生变化，价格是递增的，通过60米和75米所对应的价格，半径增加15米时价格增加了1550，也就是每米100元左右．然后通过数据发现半径最少增加5米，所以半径应该是以5的倍数增加的，大致就是每多5米收500元．

师：很好，也就是价格大致分两部分，半径小于50米时，都为2000，半径超过50米时，每增加5米费用增加500元．那我们如何利用这两个量来计算成本呢？

生3：先确定半径，然后再计算比50米多了几个5，再把增加费用计算出来．

2.3　深入分析

在面对一个崭新的现实问题情境时，学生依然可能感到无从下手，这就需要教师搭建“脚手架”，帮助学生一步步分析包括问题中可能会涉及哪些因素；需要哪些参数；如何获取这些参数；有哪些能想到的方案；这些方案是否合理；误差可能来自于哪里；如何减少误差等．此外教师还可以将问题分解为若干个子问题，列出来供学生参考，从而通过教师的提升引领作用助力学生建模能力的提升．

师：那我们处理这个问题时是不是就可以先对所有情况进行分类？按照什么来分类？

生3：按照发射器安装的个数来分类．

师：很好，那现在我们的分类依据就出现了，

因为这里面的情况比较多，我们把任务进行一下分解，把所有情况分配给咱们四个小组：一组的同学负责计算安装 1 个和 5 个发射器的情况；二组同学计算安装 2 个发射器的情况；三组同学计算安装 3 个发射器的情况；四组同学计算安装 4 个的. 每一组要把这种情况下出现的比较好的方案的成本计算出来，最终比较得到该类型下的最优方案，现在开始进行.

师：下面先请 1 组同学来展示一下他们的成果.

生 4：我们组负责计算安装 1 个或 5 个. 安装 1 个的话是把所有的建筑看做一个大的长方体，可以得到长宽高分别是 200 米、130 米、5 米，计算得外接球半径约为 121.86，因为半径增加单位为 5 米，所以将半径取做 125，计算的成本为 $P=2000+\frac{(125-50)}{5}\times 500=9500$ 元. 安装 5 个时就是把每一个的费用都算出来，行政楼、实验楼、3 号楼和 4 号楼半径都小于 50 米，体育馆直接计算得到半径为 50.71，在这我们组发现 50.71 只比 50 多了一点，就想试试能不能忽略，因为体育馆并不是标准的长方体，少了几个角，然后我们找体育馆里的最远的两个点，计算发现当半径为 50 米时可以将其完全覆盖，这样每一座建筑的费用都是 2000 元，总费用就是 $P=2000\times 5=10000$ 元.

师：很好，大家觉得 1 组同学对体育馆的处理方式可不可取？

生：挺有道理的.

师：的确，我们在解决实际问题的时候，需要联系实际不断地修正我们的模型，使之与实际情况更相符. 下面请 2 组的同学来展示一下他们的成果.

生 5：我们组解决安装 2 个发射器的情况，一共计算了 4 种建模方式，分为横向建模和纵向建模.

先看是纵向建模：第一种是将 3 号和 4 号教学楼组合，剩下的行政楼、实验楼还有体育馆组合. 3 号 4 号教学楼组合得到的半径是 50.99，费用为 $P_1=2000+500=2500$ 元，行政楼、实验楼和体育馆的组合计算得到半径为 95.2，费用为 $P_2=2000+500\times 10=7500$ 元，总费用为 $P=P_1+P_2=2000+7500=9500$ 元. 第二种为是 3 号 4 号教学楼和实验楼的一部分组合，价格为 4500 元，行政楼，体育馆和实验楼的另一部分组合，价格为 5000 元，总价格为 9500 元.

然后是横向建模，第一种是 3 号楼、实验楼和行政楼组合，4 号楼和体育馆组合，得到的总费用为 10550 元，另一种是将行政楼、实验楼、3 号楼 4 号楼还有体育馆的一部分组合，体育馆剩下的一部分组合，得到的费用为 10500 元. 所以安装两个发射器的最优方案为纵向建模的两种方案.

师：就是说这两种方案下成本可以表示为 $P=2000\times 2+500\times 11=9500$ 元. 通过二组同学刚才展示的这几种方案，我们会发现纵向建模的价格明显优于横向建模得到的价格，大家能不能根据图像考虑一下原因呢？纵向跟横向相比有什么优势？观察一下图像的形状.

生：横向的图像都比较扁.

师：扁会导致什么？我们观察横向建模的图像，长方形下面的这条边长到多少了？

生：20.

师：这一条边都已将这么长了，那它的半径还小的了么？

生：不会，肯定比较大.

师：那我们从形状上是不是就可以直接比较出后面的两种方案不如前面的方案了？

生：是的.

师：那从中我们可以得到什么启示？

生：尽量让长方体的各条边比较均衡.

师：那这样我们在选择方案时就可以先从形状上有一个大致的判断，有一些方案就可以直接不予考虑了. 下面请三组的同学来展示.

生：我们首先将 3 号楼和 4 号楼组合，行政楼和实验楼组合，体育馆单独，得到 $r_1\approx 50.99$，$P_1=2500$；$r_2\approx 71.24$，$P_2=4500$，体育馆跟刚才 1 组同学相同的处理方式，价格为 2000 元，总价格为 9000 元.

第二种方法是将 3 号楼、4 号楼和实验楼整体进行组合，行政楼整体，体育馆整体组合，经过计算 $r_1\approx 79.45$，$P_1=5000$；$r_2\approx 43.66$，$P_2=2000$，$P_3=2000$，总费用为 9000 元.

根据刚才二号得到的半径 43.66 米，发现与 50 米还有较大差距，所以考虑是否可以将实验楼一部分切割过去，得到我们的第三种方案，重新计算得到 $r_1\approx 73.19$，$P_1=4500$；$r_2\approx 49.9$，$P_2=2000$，$P_3=2000$，总费用为 8500 元.

师：非常好，这样最优成本就是 $P=2000\times 3+500\times 5=8500$. 很好，请回. 三组同学在计算过

程中,通过第二种方案计算得到的数据,观察得到了第三种更好的方案,这个过程就是在既有结果之上通过不断观察、计算、优化得到更好的结果,这也是我们探究解决实际问题时的一般过程,我们一开始可能对问题没有很好的把握,但在不断计算、发现的过程中,更优方案不断涌现,我们对方案的选择也更加有章可循.下面请四组同学展示.

生:我们组是安装4个发射器,因为一共有五栋建筑,所以就有两栋建筑要组合在一起安装一个,其他三栋建筑各安一个,一共有五种组合方法.

第一种是3号楼4号楼安一个,其他三栋建筑各安一个,得到 $r_1\approx50.99$, $P_1=2500$,其他都为2000元,总费用为8500元.

第二种是4号楼和体育馆组合安装一个,其他各安一个,因为4号楼和行政楼组成的长方体长太长了,所以它的半径很大,这样计算得到的成本一定很高,就不予考虑.

第三种是体育馆和行政楼加实验楼的一小部分安装一个,其他各安一个,这种方案因为大的长方体宽过大,成本也会比较高,可以不用考虑.

第四种是实验楼和行政楼为一组,其他各为一组,这样求出来的成本是10500元.

第五种是3号楼和实验楼为一组,其它各为一组,求出来的成本也是10500元,所以相比之下,第一种方案:3号楼和4号楼组合,其它各为一组成本是最低的,为8500元.

师:那么最优的方案费用就为 $P=2000\times4+500=8500$.非常好,请回!我们会发现到这个时候,建立在之前数据分析的基础之上,现在计算起来心里就有数了,后面的几种方案,两两组合时长宽高只要有一个过大,我们就可以直接去掉了,得到最佳的方案.现在我们就可以得到在刚才的报价之下,我们的最优方案应该选哪一个?

生:安装3个或4个.

师:如果现在的问题发生了变化,由于信息技术部门的努力将半径增加费用降为400,现在要怎么计算?用不用像刚才一样重新计算了?

生:不用,只需要将刚才算式中的500改为400即可.

值得注意的是,提示的程度应根据学生的水平而定,过度提示反而会禁锢学生的思路.在有了思路之后,具体的实施过程应让学生亲力亲为,注重学生的主体地位,想办法解决实施过程中遇到的各种问题,这样才能够真正积累数学建模教与学的经验.

2.4 模仿应用

模仿的目的在于运用所学、熟悉过程,深化认识.教师可以就学生已研究过的案例,让学生用类似的方法解决同类的问题,并要求学生要有完整的建模求解过程.由于现实问题的复杂性,不可能完全照搬套用已有的模型方法,鼓励学生创新的思路和做法.模仿作为数学建模教学中的重要一环,是学生不断积累旧知增强个人储备的必经之路,真正体现"教学相长"奠定基础.

师:现有多家公司共同参与竞标,如何来决定来选择哪家公司呢?

生:我们设单个发射器成本及安装费用为 x,半径每单位增加费用为 y.

我们现在假设安一个发射器时价格最低,也就意味着 $x+15y$ 的取值比剩下几个都要小,也就是要满足不等式组

$$\begin{cases}x+15y\leqslant2x+11y\\x+15y\leqslant3x+5y\\x+15y\leqslant4x+y\end{cases},得到\begin{cases}x\geqslant4y\\x\geqslant5y\\x\geqslant\frac{14}{3}y\end{cases}.$$

师:因为 x,y 都大于0,所以 x 大于某个值,就是比最大的还要大,得到的结果就是 $x\geqslant5y$,为了具体表示出这两个变量之间的联系,类比我们在直角坐标系下常用的表示形式,一般都是把 y 表示成关于 x 的函数,所以可以将式子调整为——

生:$y\leqslant\frac{x}{5}$.

师:采用类似的分析方法,请大家计算出安装其他个数的发射器时的等价条件.

生:

安装两个发射器

$$\begin{cases}2x+11y\leqslant x+15y\\2x+11y\leqslant3x+5y\\2x+11y\leqslant4x+y\end{cases}\quad解得\begin{cases}x\leqslant4y\\x\geqslant6y\\x\geqslant5y\end{cases},所以无解;$$

安装三个发射器

$$\begin{cases}3x+5y\leqslant x+15y\\3x+5y\leqslant2x+11y\\3x+5y\leqslant4x+y\end{cases}\quad解得\begin{cases}x\leqslant5y\\x\leqslant6y\\x\geqslant4y\end{cases},即\frac{1}{5}x\leqslant y\leqslant\frac{1}{4}x;$$

安装四个发射器

$$\begin{cases}4x+y\leqslant x+15y\\4x+y\leqslant2x+11y\\4x+y\leqslant3x+5y\end{cases}\quad解得\begin{cases}x\leqslant\frac{14}{3}y\\x\leqslant5y\\x\leqslant4y\end{cases},即\ y\geqslant\frac{1}{4}x.$$

2.5 提示小结

教师要引导学生关注:模型假设的合理性、必要性;如何解释建模中的步骤;建模中用到了哪些数学的知识方法与涉及到什么其他学科领域的知识;对结果进行检验及其意义;如何评价和改进模型等.同时针对同一问题的不同数学模型,要引导学生做出对比评价.

师:我们今天解决这个问题时所用的探究方法同样适用于其他类似问题的讨论,比如说手机信号增强器的安装方案,照明系统的安装方案等.我们今天得到的结果是建立在理想状态下,忽略了很多其他因素的影响,比如墙壁对于信号的影响,其他建筑对于信号发射器安装位置的影响等,因此应用结果时要结合综合因素,我们的结论描述需要从多角度进行分析的,结合现实因素、覆盖率的因素、维修的因素、适用性、普遍性的因素等.

结语

《标准》要求数学建模活动以课题研究的形式开展,课题研究的过程包括选题、开题、做题、结题四个环节[4].如果从逆向的角度来理解,这实际上以数学建模为载体锻炼了学生课题研究的能力,因为学生要做的不仅仅是一篇数学建模的小论文或其他研究成果,还要撰写开题报告、进行结题答辩等.在数学建模的全过程中提倡以小组为单位,齐心协力应对相对复杂对边的实际问题,并从中培养学生良好的团队协作能力.

同时,数学建模的全过程应充分体现"独立"二字,也就是说独立建模强调的是学生的自主研究、自主实践,但并不意味着完全没有教师的指导.教师应当在学生出现问题或困难的时候,及时给与必要的指导和帮助.

数学建模是一种能力,它不仅要求学生知识面广、洞察力强、兴趣广泛,更重视师生在面对纷繁复杂的现实世界时能用数学元素描述与化简,用数学思想方法分析与解决从中所提取的问题这一能力的培养.数学建模又是一种实践活动,它重在实践,也难在实践.在教学中教师应秉承"以生为主"理念,重视建模的过程与思想,充分应用问题引导、利用数学知识与技巧提升学生数学应用能力与数学建模核心素养,并渗透与传播数学文化,真正树立学生敢于质疑、勇于思考、严谨扎实、求真务实的科学精神及合作协作与创新精神,为其终身可持续发展提供必要条件.

参考文献

[1]王振波,谢金星.数学建模竞赛的发展与数学建模教师的作用[J].数学建模及其应用,2016,5(4):8－13
[2]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(实验)[M].北京:人民教育出版社,2003
[3]李大永,白永潇,张思明.高中数学特别教案[M].福州:福建教育出版社,2012
[4]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2018
[5]鲁小莉,程靖,徐斌艳,等.学生数学建模素养的评价工具研究[J].课程·教材·教法,2019,39(2):100－106

(上接第 9 页)

有深厚的友谊,季羡林感叹章用是一个"一生寂寞、孤傲落落寡合的短命之才人."闻宥(1901—1985)则说:"章君平居论算,推华罗庚(1910—1985)、李俨(1892—1963),华罗庚未及交.李俨则其故友也.言文,陈逵(1902—1990)及余."李俨对章用在天算史上的成就也作出了高度评价,并且在《科学》杂志发文详细地论述了他在数学史领域的研究成果.

参考文献

[1]闻宥.青年数学家章君用教授传略[J].科学,1940,24(11):805－807
[2]季羡林.忆章用[J].文学杂志,1947,3(4):69－75
[3]李俨.章用君修治中国算学史遗事[J].科学,1940,24(11):799－804
[4]张必胜,曲安京,姚远.清末杰出数学家、翻译家李善兰[J].上海翻译,2017(5):75－81
[5]章用.垛积比类疏证[J].科学,1939,23(11):647－663
[6]张必胜.《代数学》引入西方符号代数的意义[J].西北大学学报(自然科学版),2017,47(2):301－312
[7]章用.樊夷佛历解[J].科学,1939,23(9):518－528
[8]向达.悼章俊之[J].科学,1940,24(11):808－810
[9]章用.阳历甲子考[J].数学杂志,1936,1(1):42－56
[10]章用.阳历甲子考[J].数学杂志,1936,1(2):39－56
[11]章用.阳历甲子考[J].数学杂志,1936,1(3):51－56
[12]编者.章用教授追悼会记[J].科学,1940,24(11):828－832