

第一篇 考前准备和应试建议

2019 年高考即将开始，高考是对学生综合能力的测试，并不是说学好就可以了，要取得好的考试成绩，需要三个方面的共同作用，即实力、心理、技术。

第一部分 考前复习建议

1. 最后一段自主学习时间，制定合理的作息计划非常重要，切忌“开夜车”，每天的复习、休息、睡眠的时间安排合理，按计划行事，杜绝忙乱，让生理节奏感与心理节奏感增强。

2. 不能过早放松：可能有同学认为自己已经为高考准备了三年了，现在总算看到希望了，可以好好休息一下了。在这里要提醒大家，不要过早放松，也不要过于放松，否则在高考时就不容易聚敛精气神。

3. 每天有练。解题是一种技能，技能需要不断练习。所以，每天都要适当练习，量不要大，也不要难，每天两道中档题，五、六个简单题。顺应时间安排：数学考试安排在下午，所以平时复习数学的时间也尽量安排在下午时段。

4. 回归教材，不主张把课本通读一遍，而是在纠错的前提下，对照自己的不足之处再回到课本，弄清自己原本比较模糊的概念，理解记忆相关公式和法则，做一做课本上的例题和练习题，高考题有些就是来源于课本或是课本的变式，回归课本，还要注意知识点之间的相互联系，系统的掌握好基本知识和基本方法。

5. 看错题，查漏补缺仅仅停留在订正错题上是远远不够的。错误往往带有反复性、顽固性，下次遇到同样的题仍然可能出错，正是因为错题反映了自己在某些方面知识的薄弱或是思想方法的缺陷，所以我们才要紧紧抓住错题不放过，要找出错误的根源。

看旧题，比如把多次模拟考试中，自己没有多大把握的题（如南京模拟的第 17, 18 题）再做一遍（按照规范的书写格式），找出类题的共同点、不同点，分析解题的方法和技巧，总结规律，达到举一反三、触类旁通的目的。

第二部分 应试建议

在稳定压倒一切的政治背景下，试卷结构也不会有大的变化。命题难度，肯定会适当控制，与去年比较，估计略有降低。

（一）规范问题

书写：1. 字不一定好看，但一定要写清楚，如，圆括号不要写成方括号等；

2. 若有省略的式：多写些项，让阅卷教师看得出式子的结构及规律；同一问题中同一字母不能表示不同的量；应用题要“一设二解三答”；

3. 定理要求的条件要完整；运用公式或定理时，式子要写成相关公式或定理的结构形式；不能随便运用教材中不是定理或公式的结论。

规范答题 规范包括：1. 叙述的规范性；2. 推理的规范性；3. 表示形式的规范性（如，不等式 $f(x) > x$ 的解集用区间表示为 ____）；4. 解答过程的规范性，必要的表述；以图代理；证明题与求解题等；5. 依据的规范性：不要用“由题意可知”、“由条件可得”等表述方式，要写出推理依据的具体条件，不要笼统，否则不给分。越是简单题越要规范书写。补充结论的利弊：解答填空题可以直接用，解答题不能用，必须是书中的定理才能用。

（二）答题策略问题 基本原则：不贪心，将会做的做全了、做对了、不失分。

文理公共部分：1. 拿到试卷先看立体几何，认真读题想好思路，铃声一响，立即就答。

2. 做好立体几何题后，开始做填空题第 1-13 条（高手可继续做 14 题，但看过 3-5 分钟还没有思路，则跳过）；接着做三角题，注意规范、准确。填空题处理好（不是指做好，而是指会做的都做了）后，再将第 15、16、17、18 题遇到困难的部分进行再思考，但时间不要多，千万不能在同一问题上花多于 10 分钟的时间。如果 4-5 分钟时仍无思路，就放弃。

3. 按顺序去做 17、18 题，考前要对应用题可能遇到的最值模型进行全面巩固，对解析几何的不同题型的解法、算法进行复习。这两题要有耐心，认真读题，细心运算，特别是第 1 小题（如果是 3 小题，则是第 1、2 小题）必须做，如果第 2 或 3 小题做不下去的话，就先将第 19 题、20 题能做的做完，19、20 题不要完全不看，它们的第 1 小题通常与填空题中的中档题差不多，第 2 小题可能并不难，第 3 问你可能做不到底，但一定把你的想法和计算写出来，相信自己，这题就是这么解的，只是有些细节一时还没想到，也不要担心自己没做完，因为压轴题的主干部分全省都没有几个人做得出来（通常是万分之一左右）。

5. 全卷能做出来的部分做完后，回到没有做的填空题、17 或 18 题剩余部分，适当花点时间。如果根本没有思路，大胆放弃。宁可多花点时间做解析几何，坚持算下去，也不要第 14 题上花过多时间，特别是根本没有思路时。对于多道小题的大题，如果后面的小题要用到前一小题的结果，那么，对前一小题的结果要慎重，不能出错，否则后面做得越多越是浪费时间。

6. 最后如果还有时间，再对已做过的题进行复查，特别是有一定运算量的题再算一遍。

理科附加部分：1. 做矩阵题与极坐标与参数方程题，必须运算准确，确保这 20 分得全。

2. 第 22 题是区分题，要细心、认真做好。如遇到困难，可先做第 23 题会做的部分，做到做不下去时立即回来继续做。

3. 第 23 题只要将一看就做得出来的做好即可，若还有时间，可复查前面的题。只有有足够把握时才多花点时间尝试一下。

（三）心理调控

1. 考试过程中决不要考虑其它问题，任何杂念都是有害无益的（特别是不要事先设目标，因为考多少分（难度）不是你决定的，是由命题人决定的）。确保考试过程中眼中只有题目，脑中只有题目。

2. 难了，不要心慌，因为大家都难，有时难题对我们不一定是坏事；容易了，不要忘乎所以，更要细心、认真。

（四）解题过程中的注意点与技巧

1. 草稿纸要按顺序写，便于复查。

2. 不要留空白，更不要在没有正确解答过程前将已经写的划掉。对不会做的题，能想到多少写多少，只要是正常的、有效的过程都有分。

3. 审题要慢，答题要快，但不能慌张，心态要平和，冷静。

4. 分解的技巧。对疑难问题，实在啃不动时，一个明智的做法是：将它划分为几个子问题或一系列的步骤，先解决问题的一部分。至少先解决一部分，增加得分点。

5. 跳步解答的技巧。若前一小题不会，可先承认这一结论，并可利用这一结论解决下面的小题。甚至可以在不用前一小题结论的前提下解后面的小题，再用后面小题所得的结论解前一小题，但要注意，这要在已知条件完全一致的前提下实施。

6. 从简单、特殊情形开始。先考察特殊、简单情形。

祝同学们高考数学取得自己满意的分数！考取自己心仪的大学！

启东中学 2019 届高三数学备课组

2019 年 5 月 28 日

第二篇 考前自主训练

第一部分 填空题

一、第 1 至 8 题，属于简单题，审题要仔细，虽然简单不能大意，当然也不要简单问题想复杂了。知识点考查单一：集合运算；复数；统计；概率；算法、函数定义域、值域（简单）、基本性质、求函数值或不等式的解；三角函数图象、求值。

1. 已知集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, 则 $A \cup B = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

【答案】 $\{1,2,3\}$ 【提醒】描述法表示集合时，要看请元素的限定条件；看清所求：是交？还是并？元素个数？还是子集个数？

2. 若复数 $z=1+i$ (i 为虚数单位), 则 $z+\frac{1}{z} = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

【答案】 $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ 【提醒】看清所求：复数？共轭？模长？实部？虚部？

3. (1) 某批产品共 100 件, 将它们随机编号为 001, 002, ..., 100, 计划用系统抽样方法随机抽取 20 件产品进行检测, 若抽取的第一个产品编号为 003, 则第三件产品编号为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

(2) 某市有大型停车场 100 家, 中型停车场 200 家, 小型停车场 700 家. 为了解全市停车状况, 现按分层抽样的方法抽取一个容量为 50 的样本, 则应抽取中型停车场 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 家.

【答案】(1) 013 ;(2)10 【提醒】搞清楚下列概念：分层抽样、系统抽样、频率分布直方图、茎叶图、平均数、方差、标准差。

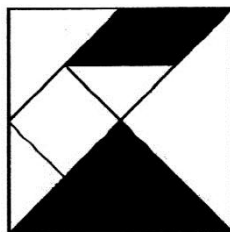
4. 已知双曲线过点 $P(2,3)$, 且有一条渐近线方程为 $\sqrt{3}x-2y=0$, 则其标准方程为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

【答案】 $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{8} = 1$ 【提醒】双曲线：标准方程、渐近线、离心率、准线方程（注意 a, b, c

的几何意义以及与椭圆的区别）；抛物线：标准方程、准线方程、焦半径公式（定义）。

5. (1) 口袋内有大小、形状完全相同的红球、白球各两个, 现从中随机摸出两个球, 则摸出的两球颜色恰好相同的概率为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

(2) 七巧板是我国古代劳动人民的发明之一, 被誉为“东方魔板”. 它是由五块等腰直角三角形, 一块正方形和一块平行四边形共七块板组成的. 如图是一个七巧板拼成的正方形, 若在此正方形中任取一点, 则该点在阴影部分的概率是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.



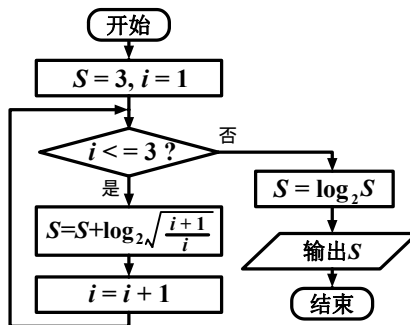
【答案】(1) $\frac{1}{3}$; (2) $\frac{3}{8}$ 【提醒】古典概型穷举法, 轻易不要用计数原理 (基本事件多的话用树状图)。

6. (1) 一个算法的伪代码如右图所示, 最后输出的值为 ▲。

(2) 执行如图所示的程序框图, 则输出 S 的值为 ▲。

```

i ← 1
S ← 0
while i ≤ 3
  S ← S + 2i
  i ← i + 1
End while
Print S
    
```



【答案】(1) 12; (2) 2 【提醒】循环结构分析时, 执行次数少, 写出所有循环, 注意循环体的步骤顺序、退出循环的条件; 执行次数多时, 写出前几次循环找出变化规律, 写出最后几次主要验证退出条件和输出结果。

7. (1) 函数 $y = \lg(1 - \sqrt{x})$ 的定义域是 ▲。

(2) 已知奇函数 $f(x)$ 的导函数为 $y = f'(x)(x \in R)$, 若 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数, 则不等式 $f'(x) > f'(1)$ 的解集是 ▲。

【答案】(1) $[0, 1)$ (2) $\{x | -1 < x < 1\}$ 【提醒】求定义域先列出使得式子有意义的所有不等式 (解不等式时注意真数大于 0, 不等号方向是否变化)、求值域问题, 一般数形结合、基本不等式等。

8. (1) 若 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, 则 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) =$ ▲。

(2) 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)(0 < \omega < 12, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$, 若 $f(0) = -\sqrt{3}$, 且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{12}$ 对称, 则以下结论正确的有 ▲ 个。

①函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{\pi}{3}$; ②函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{7\pi}{9}, 0)$ 对称;

③函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{24})$ 内是增函数;

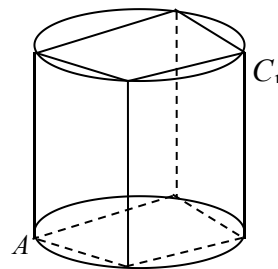
④由 $y = 2\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度可以得到函数 $f(x)$ 的图象。

【答案】(1) $\frac{1}{2}$; (2) ②④ 【提醒】熟记诱导公式、两角和差倍分公式、三角函数图象及其性质（周期性、对称轴、对称中心、最值、单调区间）

二、第 9 至 14 题，其中 9 至 13 题属于中档题，有一定综合性，注意挖掘题中隐含条件、问题转化、数形结合、解题策略的优化。14 题一般属于难题，所谓难是指没有找到破题的切口，找到了并不难，一时找不到先放放，对于大部分同学来说索性放弃。

9、立几计算

(1) 如图，圆柱内有一个内接长方体 AC_1 ，长方体的对角线为 $10\sqrt{2}$ ，圆柱的侧面展开图为矩形，此矩形面积为 100π ，圆柱的体积 ▲.



(2) 已知棱长均为 2 的正四棱锥与底面边长为 2 的正四棱柱的体积相等，则正四棱柱的高为 ▲.

【答案】(1) 250π ; (2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 【提醒】常见几何体侧面积、体积求法、三棱锥体积转换。

10、数列问题

(1) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$ ， $a_2 = -11, a_5^2 - a_{10}^2 = 0$ ，则 $S_{15} =$ ▲.

(2) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比大于 1. 若 $a_1 + a_4 = 18$ ， $a_2 + a_3 = 12$ ，则 a_1 的值为 ▲.

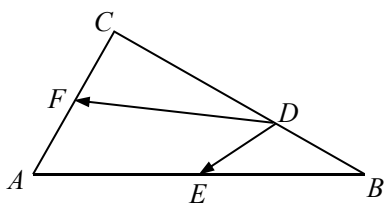
(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ，且 $(n+1)a_{n+1} - na_n - 3 = 0$ ，若对任意的 $a \in [-2, 2]$ ，不等式 $a_n \leq 2t^2 + at - 1$ 恒成立，则实数 t 的范围为 ▲.

【答案】(1) -75 ; (2) 2 ; (3) $t \geq 2$ 或 $t \leq -2$ 【提醒】等差等比数列通项、求和公式、重要性质；一般用基本量法；恒成立、存在有解问题注意数列的单调性（函数法、差分法）；

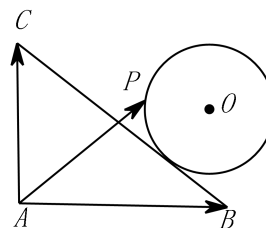
11、向量问题

(1) 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 满足： $|\vec{2a} + \vec{b}| = |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a}|$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ▲.

(2) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4$ ， $AC = 2$ ， $\angle BAC = 60^\circ$. 已知点 E, F 分别是边 AB, AC 的中点，点 D 在边 BC 上. 若 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = \frac{13}{4}$ ，则线段 BD 的长为 ▲.



第(2)题



(第 12 题图)

(3) 如图所示, 已知等腰直角三角形 ABC 中 $AB=AC=2$, 半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆 O 在三角形外与斜边 BC 相切, P 为圆上任意一点, 且满足 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $x+y$ 的最大值为 $\blacktriangle$.

【答案】(1) 120° ; (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (3) 2 【提醒】基底法(共线向量定理、平面向量基本定理)、坐标法。

12、函数问题

(1) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - x, & x > 1, \\ 1, & x \leq 1, \end{cases}$ 则不等式 $f(x) < f(\frac{2}{x})$ 的解集是 $\blacktriangle$.

(2) 过原点作函数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ 图像的切线, 设切点为 $P(x_0, y_0)$, 则 $y_0 + x_0^2 = \blacktriangle$.

(3) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x(x+m), & 0 \leq x \leq 1, \\ -2x^2 + (m-2)x + m, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$ 若在区间 $[-1, 1]$ 上方程 $f(x) = 1$

恰有 3 个解, 则实数 m 的取值范围是 $\blacktriangle$.

【答案】(1) $(0, \sqrt{2})$; (2) 3; (3) $(2\sqrt{2}-2, 1)$ 【提醒】注意对所讨论函数的转化、数形结合、临界值(极端情形单独计算)

13、解几问题

(1) 在平面直角坐标系 xOy 中, 过 $P(-2, 0)$ 的直线与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切于点 T , 直线 PT 与

圆 $(x-a)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 3$ 交于点 R, S , 且 $PT = RS$, 则正数 $a = \blacktriangle$.

(2) 已知圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 9$, 点 P 是圆 C 上的动点, 点 $M(1, 2)$, 当 $\angle MPC$ 最大时,

PM 所在直线的方程是 $\blacktriangle$.

(3) 在平面直角坐标系 xOy 中, 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点 F 作斜率为 1

的直线与圆 $C': x^2 + y^2 = b^2$ 交于 A, B 两点. 若 $\angle AOB \leq 90^\circ$, 则椭圆 C 的离心率的

取值范围是 $\blacktriangle$.

- (4) 已知点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, 若在圆 $x^2 + y^2 - 2mx - 2y + 1 = 0$ ($m > 0$) 上存在点 P , 使得 $\triangle PAB$ 两条边 PA, PB 上的中线互相垂直, 则实数 m 的取值范围是 ▲ .

【答案】 (1) 4; (2) $x - 2y + 3 = 0$; (3) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$; (4) $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$ 【提醒】 动点 (未知点)

问题先求出其轨迹, 存在问题化成交点问题, 几何条件与代数关系熟练转化.

14、不等式问题

- (1) 实数 x, y 满足 $xy - 4x - y + 1 = 0$ ($x > 1$), 则 $(x+1)(y-2)$ 的最小值为 ▲ .
- (2) 已知单位圆的一内接 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\sin(B-A+C) + \sin(A-B+C) + \sin(A-C+B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 abc 的值为 ▲ .
- (3) 已知在 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $a^2 - b^2 = bc$, 则 $\frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan A} + 3\sin A$ 的取值范围是 ▲ .
- (4) 在锐角三角形 ABC 中, AD 是边 BC 上的中线, 且 $AD = AB$, 则 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}$ 的最小值 ▲ .
- (5) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 B 为锐角, 且 $3a^2 = b^2 + 3c^2$, 则 $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A$ 的最小值为 ▲ .

【答案】 (1) $7 + 4\sqrt{3}$; (2) $\sqrt{3}$; (3) $\left(\frac{13\sqrt{3}}{6}, 4\right)$; (4) $\frac{\sqrt{13}}{2}$; (5) 16 【提醒】 多元问题一元化 (消元方法: 代入消元、整体换元); 不同类型变量化为同类型变量 (如统一成“边”、“弦”或“切”); 基本不等式或导数求最值.

【解析】 (2) 不妨设 $BD = DC = 1$, BC 上的高为 h .

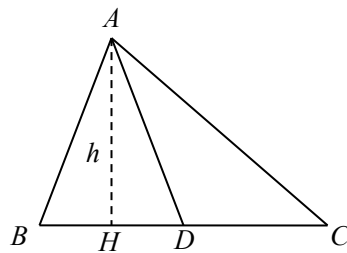
则 $\tan B = 2t$, $\tan C = \frac{2t}{3}$, 从而

$$\tan A = -\tan(B+C) = \frac{\tan B + \tan C}{\tan B \tan C - 1} = \frac{2}{t - \frac{3}{4t}}. \quad \text{所以}$$

$$\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = \frac{t}{2} + \frac{13}{8t} \geq 2\sqrt{\frac{t}{2} \times \frac{13}{8t}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad (\text{当且仅当 } \frac{t}{2} = \frac{13}{8t}, \text{ 即 } t = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ 时, 取“=”}).$$

(3) 在 $\triangle ABC$ 由余弦定理得, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - (c^2 + \frac{1}{3}b^2)}{2bc} = \frac{b}{3c}$, 由正弦定理

$$\text{得 } \cos A = \frac{\sin B}{3\sin C}, \quad 3\cos A \sin C = \sin A \cos C + \cos A \sin C, \quad 2\cos A \sin C = \sin A \cos C,$$



$\tan A = 2 \tan C$ ，所以 $\tan B = -\tan(C + A) = \frac{\tan C + \tan A}{\tan C \tan A - 1} = \frac{3 \tan C}{2 \tan^2 C - 1}$ ，又因为 $c < a$ ， B 为锐角，所以 $2 \tan^2 C - 1 > 0$ ，所以 $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 3 \tan C \tan B + 2 \tan^2 C$
 $= \frac{9 \tan^2 C}{2 \tan^2 C - 1} + 2 \tan^2 C = 10 + \frac{9}{2 \tan^2 C - 1} + (2 \tan^2 C - 1) \geq 16$.

第二部分 解答题

15. 立体几何证明（本小题满分 14 分）

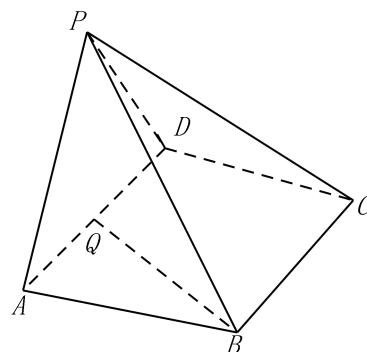
已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，

$\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ，面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$.

(1) 若 Q 为 AD 中点，证明： $BQ \perp$ 面 PAD ；

(2) 若 M 为 PA 中点，面 $BCM \cap BD = N$ ，

证明： N 为 PD 中点.



(第 15 题图)

证明：(1) 连接 BD ，因为底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ，所

以 $\triangle ABD$ 是等边三角形 2 分

因为若 Q 为 AD 中点，所以 $BQ \perp AD$ 4 分

因为面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$ ，面 $ABCD \cap$ 面 $PAD = AD$ ， $BQ \subset$ 面 $ABCD$

所以 $BQ \perp$ 面 PAD 7 分

(2) 因为底面 $ABCD$ 是菱形，所以 $BC \parallel AD$ ，

因为 $AD \not\subset$ 面 BCM ， $BC \subset$ 面 BCM ，

所以 $AD \parallel$ 面 BCM 10 分

因为 $AD \subset$ 面 PAD ，面 $BCM \cap$ 面 $PAD = MN$ ，

所以 $MN \parallel AD$ 12 分

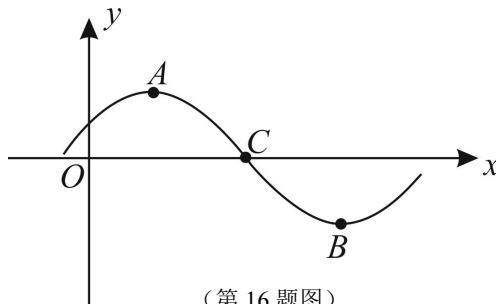
因为 M 为 PA 中点，所以 N 为 PD 中点。 14 分

16. 三角向量问题（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图像

的一部分如图所示， $C(\frac{5}{2}, 0)$ 是图像与 x 轴的交点，

A, B 分别是图像的最高点与最低点且 $AB = 5$.



(第 16 题图)

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $g(x) = f(x) + f(x + \frac{3}{2})$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$ 的最大值.

解: (1) 由函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 及 A, B 分别是图像的最高点与最低点, 设

$A(x_1, 2), B(x_2, -2)$, 因为 $AB = 5$, 所以 $(x_1 - x_2)^2 + 4^2 = 5^2$, 由此解得: $|x_1 - x_2| = 3$,

所以函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 6, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 3 分

因为 $C(\frac{5}{2}, 0)$ 是图像与 x 轴的交点, 所以 $\sin(\frac{5\pi}{6} + \varphi) = 0$, 因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} + \varphi < \frac{4\pi}{3}$, 所以 $\frac{5\pi}{6} + \varphi = \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 6 分

所以函数的解析式为 $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6})$ 7 分

(2) 函数 $g(x) = f(x) + f(x + \frac{3}{2}) = 2\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}) + 2\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6})$

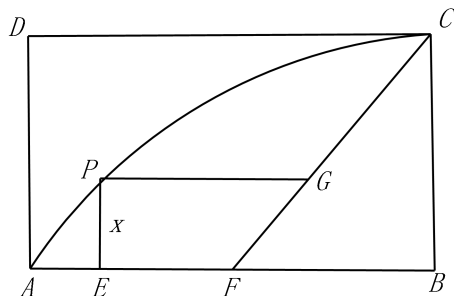
$= 2\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}) + 2\cos(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{5\pi}{12})$ 11 分

因为 $0 < x < \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{3}x + \frac{5\pi}{12} < \frac{7\pi}{12}$, 所以 $\frac{\pi}{3}x + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$ 时,

即 $x = \frac{1}{4}$ 时, 函数 $y = g(x)$ 取最大值为 $2\sqrt{2}$ 14 分

17. 实际应用问题 (本小题满分 14 分)

(1) 为了纪念五四青年节, 学校决定举办班级黑板报主题设计大赛, 高三 (1) 班李明同学将班级长 $AB = 4$ 米、宽 $BC = 2$ 米的黑板做如图所示的区域划分: 取 AB 中点 F , 连接 CF , 以 AB 为对称轴, 过 A, C 两点作一抛物线弧, 在抛物线弧上取一点 P , 作 $PE \perp AB$ 垂足为 E , 作 $PG \parallel AB$ 交 CF 于点 G . 在四边形 $PEFG$ 内设计主题 LOGO, 其余区域用于文字排版.



(第 17 题图)

(1) 设 $PE = x$, 求 PG 的长度 $f(x)$;

(2) 求四边形 $PEFG$ 面积的最大值.

解：(1)以 A 为坐标原点，以 AB, AD 所在的直线为 x 轴， y 轴建立平面直角坐标系.

所以 $A(0,0), C(4,2), B(4,0), F(2,0)$ ，所以直线 FC 为 $x-y-2=0$ 1 分

因为抛物线是以 AB 为对称轴， 设抛物线的方程为 $y^2 = 2px (p > 0)$,

因为点 C 在抛物线上，所以 $p = \frac{1}{2}$ ， 所以 $y^2 = x$ 3 分

因为 $PE = x$ ，所以 $P(x^2, x), G(x+2, x)$ ，所以 $f(x) = -x^2 + x + 2 (0 < x < \sqrt{2})$...6 分

(2)因为 $PE \perp AB$ ， $PG \parallel AB$ ，所以四边形 $PEFG$ 的面积

$$S = \frac{1}{2}(EF + PG)PE = \frac{1}{2}(2 - x^2 + x + 2 - x^2) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \text{8 分}$$

设 $g(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$ ，由 $g'(x) = -3x^2 + x + 2 = 0$ ，解得： $x = 1$ 10 分

x	$(0,1)$	1	$(1, \sqrt{2})$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	∴	极大值	∵

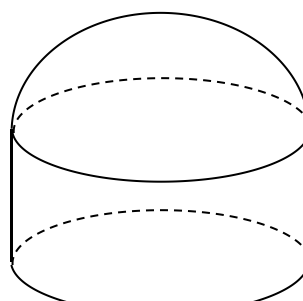
所以 $x = 1 m$ 时，四边形 $PEFG$ 面积取得最大值为 $\frac{3}{2} m$ 14 分

(11)某市度假村有一特色星空酒店，该酒店由多座帐篷构成. 每一座帐篷的体积为 $54\pi m^3$ ，且分上下两层，其中上层是半径为 $r m (r \geq 1)$ 的半球体，下层是半径为 $r m$ ，高为 $h m$ 的圆柱体（如图 2）. 经测算，上层半球体部分每平方米建造费用为 2 千元，下方圆柱体的侧面、隔层和地面三个部分平均每平方米建造费用为 3 千元. 设每一座帐篷的总建造费用为 y 千元.

- (1) 求 y 关于的 r 函数解析式，并指出该函数的定义域；
- (2) 当半径 r 为何值时，一座帐篷的总建造费用最小，并求出最小值.



(图 1)



(图 2)

【解】(1) 由题意, $\frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 54\pi$, 所以 $h = \frac{54}{r^2} - \frac{2}{3}r$. ……2 分

所以 $y = 2\pi r^2 \times 2 + 2\pi r^2 \times 3 + 2\pi r h \times 3 = 10\pi r^2 + 6\pi r \cdot \left(\frac{54}{r^2} - \frac{2}{3}r\right)$, 化简可 $y = 6\pi\left(r^2 + \frac{54}{r}\right)$. 5 分

又因为 $h > 0$, $r \geq 1$, 解 $\frac{54}{r^2} - \frac{2}{3}r > 0$, 得 $1 \leq r < 3\sqrt[3]{3}$, 即函数的定义域为 $\{r | 1 \leq r < 3\sqrt[3]{3}\}$ 7 分

(2) 设 $g(r) = r^2 + \frac{54}{r}$, $1 \leq r < 3\sqrt[3]{3}$, 则 $g'(r) = 2r - \frac{54}{r^2} = \frac{2(r-3)(r^2+3r+9)}{r^2}$, ……9 分

令 $g'(r) = 0$, 得 $r = 3$. 列表如下:

x	$[1, 3)$	3	$(3, 3\sqrt[3]{3}]$
$g'(r)$	$-$	0	$+$
$g(r)$	单调减	极小值	单调增

所以当 $r = 3$ 时, $g(r)$ 取得最小值, 且最小值为 18. 所以原函数当 $r = 3$ 时, 取得最小值 162π .

答: 半径 r 为 3 m 时, 一座帐篷的总建造费用最小, 且最小值为 162π 千元. 14 分

18. 解析几何问题 (本小题满分 16 分)

(1) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $O_1: (x+3)^2 + y^2 = 4$ 与圆 $O_2: (x-a)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 外切于点 A , 且圆 O_2 被 y 轴截得的弦长为 2.

(1) 求圆 O_2 的方程;

(2) 过点 A 的直线分别与圆 O_1 , O_2 交于 M , N 两点, 点 P 为圆 O_2 上异于 A , N 的一点.

① 若 $AM \perp AP$, 且 $AM = 2AP$, 求直线 MP 的斜率;

② 求 $\triangle PMN$ 面积的最大值.

【解】(1) 因为两圆外切, 所以 $|a+3| = r+2$ ①.

又圆 O_2 被 y 轴截得的弦长为 2, 则有 $y^2 = r^2 - a^2 = 1$ ②. ……2 分

因为 $r > 0$, 联立①②, 可得 $a = 0$, $r = 1$, 所以圆 O_2 的方程为 $x^2 + y^2 = 1$. ……4 分

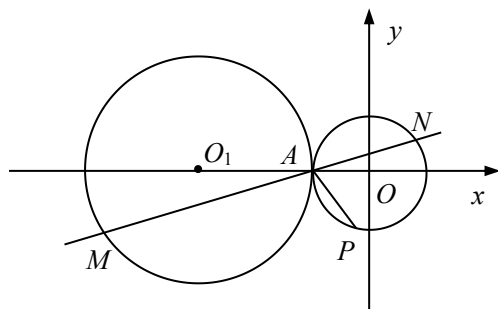
(2) ①由(1)知, 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$. 设直线 MN

的方程为 $y = k(x+1)$, 则有 O_1 到直线 MN 的距离为

$$\frac{|-3k+k|}{\sqrt{k^2+1}}, \text{ 所以 } AM = 2\sqrt{4 - \frac{4k^2}{k^2+1}} = \frac{4}{\sqrt{k^2+1}}.$$

要使 $AM \perp AP$, 必须 $k \neq 0$, 所以则直线 AP 的方程

$$\text{为 } y = -\frac{1}{k}(x+1), \text{ 即 } x+ky+1=0, \text{ 所以 } AP = 2\sqrt{1 - \frac{1}{k^2+1}} = \frac{2|k|}{\sqrt{k^2+1}}.$$



因为 $AM = 2AP$ ，所以 $\frac{4}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{4|k|}{\sqrt{k^2+1}}$ ，即 $k = \pm 1$. ……7 分

当 $k=1$ 时， $M(-3, -2)$ ， $P(0, -1)$ ，所以直线 MP 的斜率为 $\frac{1}{3}$ ；

当 $k=-1$ 时， $M(-3, 2)$ ， $P(0, 1)$ ，所以直线 MP 的斜率为 $-\frac{1}{3}$.

综上，直线 MP 的斜率为 $\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{3}$. ……9 分

②当直线 MN 的方程为 $y = k(x+1)$ ，则有 $AN = \frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$. 由①知， $AM = 2AN$ ，

所以 $\triangle PMN$ 的面积是 $\triangle PAN$ 面积的 3 倍. ……11 分

因为点 P 在圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上，取 AN 的中点 Q ，

所以当点 P 在连结 QO 并延长与圆 O 的交点处时， $\triangle PAN$ 的面积最大，此时点 P 到直线 AN

的距离为 $\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}} + 1$ ，所以 $\triangle PAN$ 的面积为 $S = \left(\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$. 因为

$\left(\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \right)^2 = 1$ ，设 $\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}} = \cos \theta$ ， $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，则有 $\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \sin \theta$ ，

所以 $S = (\cos \theta + 1) \cdot \sin \theta$ ， $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. ……13 分 由

$S' = (-\sin \theta) \sin \theta + (\cos \theta + 1) \cdot \cos \theta = \cos 2\theta + \cos \theta = 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$

令 $S' = 0$ ，得 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ，且当 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 时， $S' > 0$ ，所以函数 $S(\theta)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增；

当 $\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时， $S' < 0$ ，所以函数 $S(\theta)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，

所以当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时， $\triangle PAN$ 的面积 S 取最大值 $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，此时 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 $\triangle PMN$ 面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ ……16 分

说明：①中 $AM = 2AN$ ， $AM = 2AP$ ，则有 $AN = AP$ ，又因为 $AN \perp AP$ ，所以易得 $k = \pm 1$. 下

同. ②转化为求 $\triangle PAN$ 面积的最大值时，即求圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的内接三角形面积的最大值.

而半径为 1 的圆的内接正三角形面积最大，最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

(11) 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，直线 $l: y = kx + \frac{1}{2}$ 与椭圆交于 A, B 两点， P 为椭圆右顶点.

(1) 若 $k=1$ ，求 $\triangle PAB$ 的面积；

(2) 设 $\triangle PAB$ 的外接圆与 x 轴另有一个交点 $Q(x_0, 0)$ ，求 x_0 的取值范围.

解: (1) 因为 $k=1$, 所以直线 l 为 $y=x+\frac{1}{2}$, 由 $\begin{cases} y=x+\frac{1}{2} \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 消 y , 得 $5x^2+4x-3=0$,

则 $x_1+x_2=-\frac{4}{5}, x_1x_2=-\frac{3}{5}$ 2 分

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 所以 $AB = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = \sqrt{1+k^2} |x_1-x_2|$
 $= \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{2}{5} \sqrt{38}$ 4 分

点 P 到直线 l 的距离为 $d = \frac{\left|2-0+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$, 所以 ΔPAB 的面积为 $\frac{1}{2} AB \cdot d = \frac{\sqrt{39}}{2}$ 6 分

(2) 设 ΔPAB 的外接圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, 令 $y=0$, 则

$$x^2+Dx+F=(x-2)(x-x_0),$$

所以 ΔPAB 的外接圆的方程为 $x^2+y^2-(2+x_0)x+Ey+2x_0=0$ 7 分

$$\text{由} \begin{cases} y=kx+\frac{1}{2} \\ x^2+y^2-(2+x_0)x+Ey+2x_0=0 \end{cases} \text{消 } y,$$

$$\text{得} (1+k^2)x^2+(k+Ek-x_0-2)x+2x_0+\frac{E}{2}+\frac{1}{4}=0$$

$$\text{所以 } x^2+\frac{k+Ek-x_0-2}{1+k^2}x+\frac{2x_0+\frac{E}{2}+\frac{1}{4}}{1+k^2}=0 (*) \text{8 分}$$

$$\text{由} \begin{cases} y=kx+\frac{1}{2} \\ x^2+4y^2=4 \end{cases} \text{消 } y, \text{ 得 } (1+4k^2)x^2+4kx-3=0$$

$$\text{所以 } x^2+\frac{4k}{1+4k^2}x-\frac{3}{1+4k^2}=0 (**) \text{9 分}$$

因为 $(*)$ 与 $(**)$ 的解都是 A, B 两点的横坐标, 所以 $(*)$ 与 $(**)$ 是同一方程,

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{k+Ek-x_0-2}{1+k^2} = \frac{4k}{1+4k^2} \\ \frac{2x_0+\frac{E}{2}+\frac{1}{4}}{1+k^2} = -\frac{3}{1+4k^2} \end{cases} \text{ 由第二个方程得: } E = \frac{-6(1+k^2)}{1+4k^2} - 4x_0 - \frac{1}{2},$$

将此方程代入第一个方程化简得： $-2x_0 = \frac{16k^3 + 16k^2 + 19k + 4}{(4k^2 + 1)(4k + 1)} = 1 + 3 \frac{k+1}{1+4k^2}$ …12 分

因为直线 l 过定点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 在椭圆的内部，所以直线 l 与椭圆一定相交，

所以 k 的取值范围为 $k \neq -\frac{1}{4}$ ，设 $n = k + 1, n \neq \frac{3}{4}$ ，所以 $\frac{k+1}{1+4k^2} = \frac{n}{4n^2 - 8n + 5}$ 。

1° $n = 0$ 时， $\frac{n}{4n^2 - 8n + 5} = 0$ ；

2° $n \neq 0$ 且 $n \neq -\frac{1}{4}$ 时， $\frac{1}{4n + \frac{5}{n} - 8}$ ，设 $h(n) = 4n + \frac{5}{n} - 8$ ， $h'(n) = 4 - \frac{5}{n^2}$ ，

所以函数 $h(n)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ 为单调增函数；

函数 $h(n)$ 在 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ 和 $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 为单调减函数，

所以 $h(n) \leq -4\sqrt{5} - 8$ 或 $h(n) \geq 4\sqrt{5} - 8$ 。

所以 $\frac{2 - \sqrt{5}}{4} \leq \frac{1}{4n + \frac{5}{n} - 8} \leq \frac{2 + \sqrt{5}}{4}$ 且 $\frac{1}{4n + \frac{5}{n} - 8} \neq 0$ ，

综上： $\frac{k+1}{1+4k^2}$ 的取值范围为 $\left[\frac{2 - \sqrt{5}}{4}, \frac{2 + \sqrt{5}}{4}\right]$ 。

所以 x_0 的取值范围是 $\left[\frac{-10 - 3\sqrt{5}}{8}, \frac{3\sqrt{5} - 10}{8}\right]$ ………16 分

19. 导数问题（本小题满分 16 分）

(1) 已知 $f(x) = e^x \ln x, g(x) = \frac{2e^x}{ex}$ 。

(1) 求函数 $y = g(x)$ 的极小值； (2) 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间；

(3) 证明： $f(x) + g(x) > 1$ 。

解：(1) 函数 $y = g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，

由 $g'(x) = \frac{2(x-1)e^x}{ex^2} = 0$ ，解得： $x = 1$ ……………1 分

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	—	—	0	+
$g(x)$	减	减	极小值	增

所以函数 $y = g(x)$ 的极小值为 $g(1) = 2$ 3 分

(2) 函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)e^x$4 分 设

$h(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, 所以函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 为单调减函数, 在 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ 为单调增函数, 所以函数 $h(x)$ 的最小值为 $h(1) = 1 > 0$, 所以 $f'(x) > 0$. 因

此函数 $y = f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调减区间9 分

(3) 要证: $f(x) + g(x) > 1$, 只需证: $e^x \ln x + \frac{2e^x}{ex} > 1$ 即证: $x \ln x + \frac{2}{e} > \frac{x}{e^x}$ 11 分

设 $Q(x) = x \ln x + \frac{2}{e}$, 则 $Q'(x) = \ln x + 1$, 所以函数 $Q(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 为单调减函数, 在

$\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 为单调增函数, 所以函数 $Q(x)$ 的最小值为 $Q\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$ 13 分

设 $F(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $F'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, 所以函数 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 为单调增函数, 在 $(1, +\infty)$ 为单调减函数, 所以函数 $F(x)$ 的最大值为 $F(1) = \frac{1}{e}$, 所以 $x \ln x + \frac{2}{e} > \frac{x}{e^x}$ 16 分

(11) 已知函数 $f(x) = \frac{ae^x}{x} + x$.

(1) 若函数 $f(x)$ 的图象在 $(1, f(1))$ 处的切线经过点 $(0, -1)$, 求 a 的值;

(2) 是否存在负整数 a , 使函数 $f(x)$ 的极大值为正值? 若存在, 求出所有负整数 a 的值; 若不存在, 请说明理由;

(3) 设 $a > 0$, 求证: 函数 $f(x)$ 既有极大值, 又有极小值.

解: (1) $\because f'(x) = \frac{ae^x(x-1) + x^2}{x^2} \therefore f'(1) = 1, f(1) = ae + 1 \therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切

线方程为: $y - (ae + 1) = x - 1$, 又直线过点 $(0, -1) \therefore -1 - (ae + 1) = -1$, 解得: $a = -\frac{1}{e}$. 2 分

(2) 若 $a < 0$, $f'(x) = \frac{ae^x(x-1) + x^2}{x^2}$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 函数在 $(-\infty, 0)$ 上无极值; 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 函数在 $(0, 1)$ 上无极值;

(方法一) 在 $(1, +\infty)$ 上, 若 $f(x)$ 在 x_0 处取得符合条件的极大值 $f(x_0)$, 则 $\begin{cases} x_0 > 1 \\ f(x_0) > 0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$, 5 分

$$\text{则} \begin{cases} x_0 > 1 & (1) \\ \frac{ae^{x_0}}{x_0} + x_0 > 0 & (2), \text{由 (3) 得: } ae^{x_0} = -\frac{x_0^2}{x_0 - 1}, \text{代入 (2) 得: } -\frac{x_0}{x_0 - 1} + x_0 > 0, \\ \frac{ae^{x_0}(x_0 - 1) + x_0^2}{x_0^2} = 0 & (3) \end{cases}$$

结合 (1) 可解得: $x_0 > 2$, 再由 $f(x_0) = \frac{ae^{x_0}}{x_0} + x_0 > 0$ 得: $a > -\frac{x_0^2}{e^{x_0}}$,

设 $h(x) = -\frac{x^2}{e^x}$, 则 $h'(x) = \frac{x(x-2)}{e^x}$, 当 $x > 2$ 时, $h'(x) > 0$, 即 $h(x)$ 是增函数,

所以 $a > h(x_0) > h(2) = -\frac{4}{e^2}$,

又 $a < 0$, 故当极大值为正数时, $a \in (-\frac{4}{e^2}, 0)$, 从而不存在负整数 a 满足条件.8 分

(方法二) 在 $x \in (1, +\infty)$ 时, 令 $H(x) = ae^x(x-1) + x^2$, 则 $H'(x) = (ae^x + 2)x$

$\because x \in (1, +\infty) \therefore e^x \in (e, +\infty) \because a$ 为负整数 $\therefore a \leq -1 \therefore ae^x \leq ae \leq -e$

$\therefore ae^x + 2 < 0 \therefore H'(x) < 0 \therefore H(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调减

又 $H(1) = 1 > 0$, $H(2) = ae^2 + 4 \leq -e^2 + 4 < 0 \therefore \exists x_0 \in (1, 2)$, 使得 $H(x_0) = 0$...5 分

且 $1 < x < x_0$ 时, $H(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$; $x > x_0$ 时, $H(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$;

$\therefore f(x)$ 在 x_0 处取得极大值 $f(x_0) = \frac{ae^{x_0}}{x_0} + x_0$ (*)

又 $H(x_0) = ae^{x_0}(x_0 - 1) + x_0^2 = 0 \therefore \frac{ae^{x_0}}{x_0} = -\frac{x_0}{x_0 - 1}$ 代入 (*) 得:

$f(x_0) = -\frac{x_0}{x_0 - 1} + x_0 = \frac{x_0(x_0 - 2)}{x_0 - 1} < 0 \therefore$ 不存在负整数 a 满足条件.8 分

(3) 设 $g(x) = ae^x(x-1) + x^2$, 则 $g'(x) = x(ae^x + 2)$,

因为 $a > 0$, 所以, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x < 0$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 故 $g(x)$ 至多两个零点.

又 $g(0) = -a < 0$, $g(1) = 1 > 0$, 所以存在 $x_1 \in (0, 1)$, 使 $g(x_1) = 0$

再由 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增知,

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $g(x) < 0$, 故 $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, 故 $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$, $f(x)$ 单调递增;

所以函数 $f(x)$ 在 x_1 处取得极小值.12 分

当 $x < 0$ 时, $e^x < 1$, 且 $x-1 < 0$, 所以 $g(x) = ae^x(x-1) + x^2 > a(x-1) + x^2 = x^2 + ax - a$,

函数 $y = x^2 + ax - a$ 是关于 x 的二次函数, 必存在负实数 t , 使 $g(t) > 0$, 又 $g(0) = -a < 0$,

故在 $(t, 0)$ 上存在 x_2 , 使 $g(x_2) = 0$, 再由 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减知,

当 $x \in (-\infty, x_2)$ 时, $g(x) > 0$, 故 $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_2, 0)$ 时, $g(x) < 0$, 故 $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} < 0$, $f(x)$ 单调递减;

所以函数 $f(x)$ 在 x_2 处取得极大值.

综上, 函数 $f(x)$ 既有极大值, 又有极小值.16 分

20. 数列问题 (本小题满分 16 分) (数列的判定证明复习南通模拟)

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , $T_n = 1 - a_n$. 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = 1 - b_n$.

若 $C_n = \frac{1}{T_n}$.

(1) 证明数列 $\{C_n\}$ 成等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $T_n(nb_n + n - 2) \leq k_n$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

(1) 证明: 由 $T_n = 1 - a_n$, 得 $T_{n+1} = 1 - a_{n+1}$ 且 $T_1 = a_1 = 1 - a_1$,

得 $a_1 = \frac{1}{2}$, $C_1 = 2$, 又 $C_{n+1} - C_n = \frac{1}{T_{n+1}}(1 - a_{n+1}) = 1$, -----4 分

所以数列 $\{C_n\}$ 以 2 为首项 1 为公差的成等差数列；-----5 分

$$C_n = 2 + (n-1) = n+1, \quad T_n = \frac{1}{C_n} = \frac{1}{n+1} = 1 - a_n, \quad \text{得 } a_n = \frac{n}{n+1},$$

因为 $a_1 = \frac{1}{2}$ 也满足，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{n}{n+1}$ ；-----8 分

(2) 解：由 $S_n = 1 - b_n$ ，得 $b_1 = \frac{1}{2}$ ，

$$S_{n+1} - S_n = b_n - b_{n+1} = b_{n+1}, \quad \text{得 } b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n, \quad \text{所以 } b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{-----10 分}$$

$$T_n(nb_n + n - 2) = \frac{1}{n+1}\left[n\left(\frac{1}{2}\right)^n + n - 2\right], \quad k \geq \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n-2}{n}\right], \quad \text{-----12 分}$$

$$\text{令 } g(n) = \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n-2}{n}\right], \quad g(n+1) - g(n) = -\frac{n(n+3) + (n-4)2^{n+1}}{n(n+1)(n+2)2^{n+1}},$$

当 $n \geq 4$ 时 $g(n+1) - g(n) < 0$ ， $g(n)$ 的最大值为 $g(4) = \frac{9}{80}$ -----14 分

而 $g(1) = -\frac{1}{4}$ ， $g(2) = \frac{1}{12}$ ， $g(3) = \frac{11}{96}$ ，所以 $g(n)$ 的最大值为 $g(3) = \frac{11}{96}$ ，

实数 k 的取值范围为 $k \geq \frac{11}{96}$ -----16 分

(11) 若数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数，且满足：当 $n \leq m$ 时， $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，

当 $n \geq m+1$ 时， $\{a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列，则定义数列 $\{a_n\}$ 为“ m 连体数列”

($m \geq 3$ ， $m \in \mathbf{N}^*$)。设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 为“7 连体数列”。① 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

② 集合 $\{n \mid \lambda \geq a_n S_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ 中的元素有且仅有 2 个，求实数 λ 的取值范围；

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 为“ m 连体数列”，且 $a_1 = -17$ ，是否存在正整数 k, r ($k < r$)，

使得 $S_k = S_r$ ？若存在，求出所有的 k, r 值；若不存在，请说明理由。

【解】(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 为“7 连体数列”，所以数列 $\{a_n\}$ 前 7 项成等差数列，从第 6 项

起是等比数列，所以 $a_6 = a_1 + 10$ ， $a_7 = a_1 + 12$ ，且 $\frac{a_7}{a_6} = 3$ ，解得 $a_1 = -9$ 。-----2 分

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} 2n-11, & n \leq 5, n \in \mathbf{N}^*, \\ 3^{n-6}, & n \geq 6, n \in \mathbf{N}^*. \end{cases} \quad \text{-----4 分}$$

$$(\text{或写成 } a_n = \begin{cases} 2n-11, & n \leq 6, n \in \mathbf{N}^*, \\ 3^{n-6}, & n \geq 7, n \in \mathbf{N}^*. \end{cases} \text{ 或 } a_n = \begin{cases} 2n-11, & n \leq 7, n \in \mathbf{N}^*, \\ 3^{n-6}, & n \geq 8, n \in \mathbf{N}^*. \end{cases})$$

(2) 由 (1) 知, 当 $n \leq 5$ 时, $a_n < 0$, 当 $n \geq 6$ 时, $a_n > 0$;

当 $n \leq 8$ 时, $S_n < 0$, 当 $n \geq 9$ 时, $S_n > 0$,

所以当且仅当 $n = 6, 7, 8$ 时, $a_n S_n < 0$. ……6 分

而 $a_6 S_6 = -24$, $a_7 S_7 = -63$, $a_8 S_8 = -108$, 要使集合 $\{n | \lambda \geq a_n S_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ 中的元素有且仅

有 2 个, 所以实数 λ 的取值范围是 $[-63, -24)$. ……8 分

(3) 由题意知, $a_1 = -17$, 所以 $a_{m-1} = 2m-21$, $a_m = 2m-19$, 且 $\frac{a_m}{a_{m-1}} = 3$, 解得 $m = 11$.

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} 2n-19, & n \leq 11, n \in \mathbf{N}^*, \\ 3^{n-10}, & n \geq 12, n \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$$

$$\text{所以 } S_n = \begin{cases} n^2 - 18n, & n \leq 11, n \in \mathbf{N}^*, \\ \frac{3^{n-9} - 163}{2}, & n \geq 12, n \in \mathbf{N}^*. \end{cases} \quad \text{……11 分}$$

①当 $k < r \leq 11$, 且 $k, r \in \mathbf{N}^*$ 时, 由 $S_k = S_r$, 得 $k^2 - 18k = r^2 - 18r$,

$$\text{所以 } k+r=18, \text{ 解得 } \begin{cases} k=7, \\ r=11, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k=8, \\ r=10. \end{cases}$$

②当 $12 \leq k < r$, 且 $k, r \in \mathbf{N}^*$ 时, 由 $S_k = S_r$, 得 $\frac{3^{k-9} - 163}{2} = \frac{3^{r-9} - 163}{2}$,

解得 $k = r$ (不合, 舍去); 13 分

③当 $k \leq 11$ 且 $r \geq 12$, 且 $k, r \in \mathbf{N}^*$ 时, 由 $S_k = S_r$, 得 $k^2 - 18k = \frac{3^{r-9} - 163}{2}$,

$$\text{即 } 2k^2 - 36k + 163 = 3^{r-9}.$$

因为 $k \leq 11$, 所以 $2k^2 - 36k + 163 \leq 129$, 所以 $3^{r-9} \leq 129$,

又 $r \geq 12$, 所以 $r = 12$ 或 13 ,

经检验, $r = 12$ 或 13 时, k 无整数解.

$$\text{综上, 满足条件的解为 } \begin{cases} k=7, \\ r=11, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k=8, \\ r=10. \end{cases} \quad \text{……16 分}$$

第三部分 理科加试

1. 矩阵

(I) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 求 X .

解: 设 $X = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, $AX = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_0 + y_0 \\ x_0 + y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 4 分

所以 $\begin{cases} 2x_0 + y_0 = 1 \\ x_0 + y_0 = 2 \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 3 \end{cases}$, 所以 $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 10 分

(II) 若点 $P(1, 2)$ 在矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$ 对应的变换作用下得到点 $P'(5, 4)$, 求矩阵 A 的特

征值和矩阵 A^{-1} .

【解】因为 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, 得 $\begin{cases} 1+2a=5 \\ b+2=4 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$, 所以 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$3 分

令矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4 = 0$, 得 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$.

所以 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 A 的特征值为 $3, -1$6 分

【提醒】注意求逆矩阵的格式, 公式法公式要记牢, 定义法计算要准确!

(III) 已知切变变换 T_1 对应的矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 伸压变换 T_2 对应的矩阵是 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 若曲线

$C_1: y = 4x^2 - x$ 先经过变换 T_1 , 再经过变换 T_2 后所得曲线 C_2 , 求曲线 C_2 的方程.

【解析】记变换 T_1 、 T_2 对应的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则

因为 $BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,3 分

设曲线 C_1 上任意一点 $P(x, y)$, 依次在变换作用下得到曲线 C_2 上点 $Q(x', y')$, 则

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ x+y \end{bmatrix}, \text{ 即 } \begin{cases} x' = 2x \\ y' = x+y \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' \\ y = y' - \frac{1}{2}x' \end{cases}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

因为点 P 在曲线 C_1 上, 所以 $y = 4x^2 - x$,

所以 $y' - \frac{1}{2}x' = 4 \cdot (\frac{1}{2}x')^2 - \frac{1}{2}x'$, $y' = x'^2$, 即曲线 C_2 方程为: $y = x^2$.

所以曲线 C_2 方程为: $y = x^2$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

2. 极坐标与参数方程

(I) 在极坐标系中, 已知曲线 $C_1: \rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ 与曲线 $C_2: \rho = 2 \cos \theta$ 相交于 A, B 两

点, 求 $OA \cdot OB$ 的值 (O 为极点).

【解析】以极点为坐标原点, 极轴为 x 轴的正半轴, 建立平面直角坐标系,

曲线 $C_1: \rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ 化成平面直角坐标为 $x + y - 2 = 0$ $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

曲线 $C_2: \rho = 2 \cos \theta$ 化成平面直角坐标为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

由 $\begin{cases} y = -x + 2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

所以 $OA \cdot OB = 2\sqrt{2}$ $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

(II) 已知曲线 $C: \begin{cases} x = 2 \cos \theta, \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 曲线 $C': \begin{cases} x = -\sqrt{t}, \\ y = -\sqrt{2t} \end{cases}$ (t 为参数). 若点

A 是两曲线的交点, 求点 A 的直角坐标.

【解析】将曲线 $C: \begin{cases} x = 2 \cos \theta, \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 化为直角坐标方程, 得 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ $\dots\dots 3 \text{ 分}$

将曲线 $C': \begin{cases} x = -\sqrt{t}, \\ y = -\sqrt{2t} \end{cases}$ (t 为参数) 化为直角坐标方程, 得 $y = \sqrt{2}x$ ($x \leq 0$). $\dots\dots 6 \text{ 分}$

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = \sqrt{2}x (x \leq 0), \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -\frac{2}{3}, \\ y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \end{cases}$ 即点 A 的直角坐标为 $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ $\dots\dots 10 \text{ 分}$

(III) 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sin\theta$. 以极点为原点, 极轴为 x 轴的正半轴, 建立

平面直角坐标系, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t + 2 \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程;

(2) 求直线 l 被曲线 C 所截得的弦长.

【解析】(1) 因为曲线 C 的极坐标方程可化为 $\rho^2 = 2\rho\sin\theta$. 且 $x^2 + y^2 = \rho^2$, $y = \rho\sin\theta$, 所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

直线 l : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + \sqrt{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$ 的普通方程为 $y = \sqrt{3}x + 2$6 分

(2) 圆心 $(0, 1)$ 到直线 l : $y = \sqrt{3}x + 2$ 的距离为 $d = \frac{|-1+2|}{\sqrt{1+\sqrt{3}^2}} = \frac{1}{2}$,

又因为半径为 1, 所以弦长为 $2\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{3}$10 分

3 空间向量 (熟记几种空间角的求法、与向量所成角之间的区别联系)

如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $AB = BC = \sqrt{2}$, $BB_1 = 3$, D 为 A_1C_1 的中点, F 在线段 AA_1 上.

(1) AF 为何值时, $CF \perp$ 平面 B_1DF ?

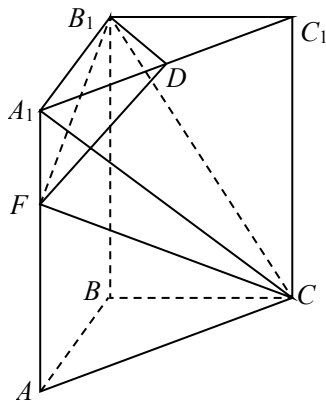
(2) 设 $AF = 1$, 求平面 B_1CF 与平面 ABC 所成的锐二面角的余弦值.

【解析】(1) 因为直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 以 B 点为原点,

BA 、 BC 、 BB_1 分别为 x 、 y 、 z 轴建立如图所示空间直角

坐标系. 因为 $AC = 2$, $\angle ABC = 90^\circ$, 所以 $AB = BC = \sqrt{2}$, 从而

$$B(0, 0, 0), A(\sqrt{2}, 0, 0), C(0, \sqrt{2}, 0), B_1(0, 0, 3), A_1(\sqrt{2}, 0, 3), C_1(0, \sqrt{2}, 3),$$



$$D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 3\right), E\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

所以 $\overrightarrow{CA_1} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3)$, 设 $AF=x$, 则 $F(\sqrt{2}, 0, x)$,

$$\overrightarrow{CF} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, x), \overrightarrow{B_1F} = (\sqrt{2}, 0, x-3), \overrightarrow{B_1D} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

$$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{B_1D} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + x \cdot 0 = 0, \text{ 所以 } \overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{B_1D}.$$

要使 $CF \perp$ 平面 B_1DF , 只需 $CF \perp B_1F$. 由 $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{B_1F} = 2 + x(x-3) = 0$, 得 $x=1$ 或 $x=2$,

故当 $AF=1$ 或 2 时, $CF \perp$ 平面 B_1DF5 分

(2) 由 (1) 知平面 ABC 的法向量为 $n_1 = (0, 0, 1)$.

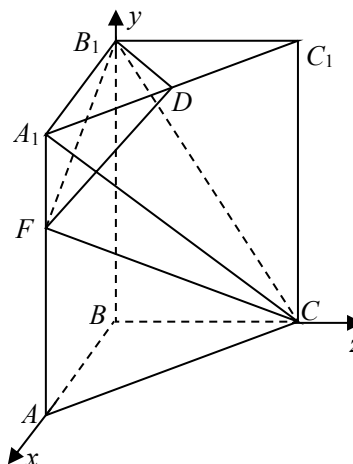
设平面 B_1CF 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

$$\text{则由 } \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{CF} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{B_1F} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + z = 0, \\ \sqrt{2}x - 2z = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } z=1 \text{ 得 } n = \left(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 1\right),$$

所以平面 B_1CF 与平面 ABC 所成的锐二面角的余弦值

$$\cos \langle n, n_1 \rangle = \frac{1}{1 \times \sqrt{2 + \frac{9}{2} + 1}} = \frac{\sqrt{30}}{15}. \text{10 分}$$



4. 抛物线

(1) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 过 F 且斜率为 $\frac{4}{3}$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, B 在 x 轴的上方, 且点 B 的横坐标为 4.

(1) 求抛物线 C 的标准方程;

(2) 设点 P 为抛物线 C 上异于 A, B 的点, 直线 PA 与 PB 分别交抛物线 C 的准线于 E, G 两点, x 轴与准线的交点为 H , 求证: $HG \cdot HE$ 为定值, 并求出定值.

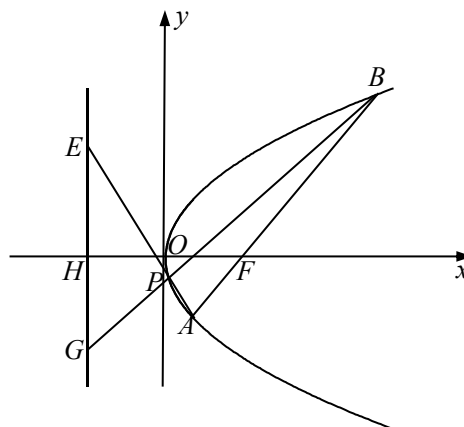
【解析】(1) 由题意得: $F(\frac{p}{2}, 0)$, 因为点 B 的横

坐标为 4, 且 B 在 x 轴的上方, 所以 $B(4, \sqrt{8p})$,

因为 AB 的斜率为 $\frac{4}{3}$, 所以 $\frac{\sqrt{8p}}{4 - \frac{p}{2}} = \frac{4}{3}$, 整理得:

$$p + 3\sqrt{2}\sqrt{p} - 8 = 0, \text{ 即 } (\sqrt{p} - \sqrt{2})(\sqrt{p} + 4\sqrt{2}) = 0,$$

得 $p=2$, 抛物线 C 的方程为: $y^2 = 4x$4 分



(2) 由 (1) 得: $B(4, 4)$, $F(1, 0)$, 准线方程 $x = -1$,

$$\text{直线 } l \text{ 的方程: } y = \frac{4}{3}(x-1), \text{ 由 } \begin{cases} y = \frac{4}{3}(x-1), \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

解得 $x = \frac{1}{4}$ 或 $x = 4$, 于是得 $A(\frac{1}{4}, -1) \dots 6$ 分

设点 $P(\frac{n^2}{4}, n)$, 又题意 $n \neq 1$ 且 $n \neq -4$, 所以直线 $PA: y+1 = \frac{4}{n-1}(x-\frac{1}{4})$,

令 $x = -1$, 得 $y = -\frac{n+4}{n-1}$, 即 $HE = \left| -\frac{n+4}{n-1} \right|$,8 分

同理可得: $HG = \left| \frac{4n-4}{n+4} \right|$,

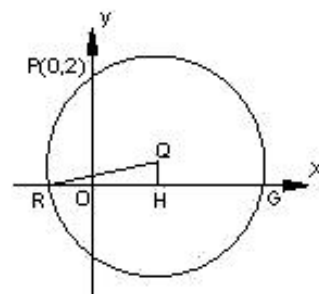
$$HG \cdot HE = \left| -\frac{n+4}{n-1} \right| \cdot \left| \frac{4n-4}{n+4} \right| = 4. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

(11) 设圆 Q 过点 $P(0, 2)$, 且在 x 轴上截得的弦 RG 的长为 4.

(1) 求圆心 Q 的轨迹 E 的方程;

(2) 过点 $F(0, 1)$, 作轨迹 E 的两条互相垂直的弦

AB, CD . 设 AB, CD 的中点分别为 M, N , 试判断直线 MN 是否过定点? 并说明理由.



【解析】(1) 设圆心 Q 的坐标为 (x, y) , 如图过圆心 Q 作 $QH \perp x$ 轴

于 H , 则 H 为 RG 的中点, 在 $Rt\triangle RHQ$ 中, $QR^2 = QH^2 + RH^2 \dots 3$ 分

$$\because QR = QP, RH = 2$$

$$\therefore x^2 + (y-2)^2 = y^2 + 4 \quad \text{。即 } x^2 = 4y$$

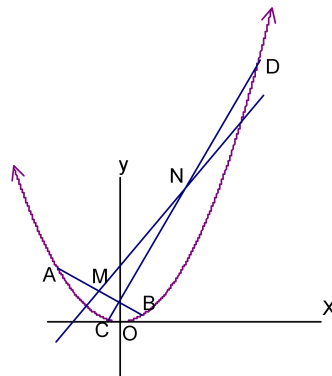
(2) 设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), M(x_M, y_M), N(x_N, y_N)$

直线 AB 的方程为 $y = kx + 1$ ($k \neq 0$) 则 $x_A^2 = 4y_A \dots\dots ①$

$$x_B^2 = 4y_B \dots\dots ②$$

$$\text{由 } ① - ② \text{ 得 } x_A + x_B = \frac{4(y_A - y_B)}{x_A - x_B} = 4k, \therefore x_M = 2k,$$

$\therefore$ 点 $M(x_M, y_M)$ 在直线 $y = kx + 1$ 上,



$$\therefore y_M = kx_M + 1 = 2k^2 + 1.$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的坐标为 } (2k, 2k^2 + 1).$$

$$\text{同理可得: } x_C + x_D = -\frac{4}{k},$$

$$x_N = -\frac{2}{k}, y_N = -\frac{1}{k}x_N + 1 = \frac{2}{k^2} + 1$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{2}{k}, \frac{2}{k^2} + 1\right).$$

$$\text{直线 } MN \text{ 的斜率为 } k_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{k^2 - \frac{1}{k^2}}{k + \frac{1}{k}} = \frac{k^2 - 1}{k},$$

$$\text{其方程为 } y - 2k^2 - 1 = \frac{k^2 - 1}{k}(x - 2k),$$

$$\text{整理得 } k(y - 3) = (k^2 - 1)x,$$

显然, 不论 k 为何值, 点 $(0, 3)$ 均满足方程,

$\therefore$ 直线 MN 恒过定点 $(0, 3)$.

5. 概率

(1) n 个同学 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 在操场上围成一圈进行传球游戏, 规则如下: 从 A_1 开始传球, 每人只能将球随机传给自己左边或右边相邻的同学, 球从一名同学传到另一名同学后记为一次传球, 若第 k ($k \leq n-1$) 次传球后球又回到 A_1 , 则游戏结束; 否则第 n 次传球后, 游戏也必须结束.

(1) 若 $n=3$, 求 3 次传球后, 球恰好又回到 A_1 的概率;

(2) 若 $n=7$, 记游戏结束时传球的次数为随机变量 ξ , 求 ξ 的分布列与 $E(\xi)$.

【解析】(1) 因为每人只能将球随机传给自己左边或右边相邻的同学, 则球从一名同学传到另一名同学的概率为 $\frac{1}{2}$, 且同学之间的传球是相互独立的, 记 3 次传球后, 球恰好

$$\text{又回到 } A_1 \text{ 为事件 } B, \text{ 则 } P(B) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

答：3 次传球后，球恰好又回到 A_1 的概率为 $\frac{1}{4}$ 4 分

(2) 游戏结束时传球的次数 ξ 可能取值为 2, 4, 6, 7,

$$P(\xi=2)=2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}; \quad P(\xi=4)=2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

$$P(\xi=6)=\frac{4}{2^6}=\frac{1}{16}; \quad P(\xi=7)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{5}{16} \quad \text{.....8 分}$$

随机变量 ξ 的分布表为

ξ	2	4	6	7
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$

所以 $E(\xi) = \frac{65}{16}$ 10 分

(11) 对于给定正整数 $n \geq 2$, n 位整数 $a = \overline{a_1 a_2 \cdots a_n}$, 其中 $a_i \in \{0, 1, 2\}, i=1, 2, \cdots, n$ 且 $a_1 \neq 0$,

(1) 求各数位上数字均不为 0 的概率;

(2) 随机变量 X 表示 a 的各数位上 0 的个数, 求 X 的概率分布列及数学期望.

【解析】(1) 根据乘法原理, a 的个数是: $2 \times 3^{n-1}$, 各数位均不为 0 的有 2^n ,

所以各数位上数字均不为 0 的概率 $p = \frac{2^n}{2 \times 3^{n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$3 分

(2) X 的可能取值为: 0, 1, 2, ..., n .

$$p(X=0) = \frac{2^n}{2 \times 3^{n-1}}; \quad p(X=1) = \frac{C_{n-1}^1 2^{n-1}}{2 \times 3^{n-1}}; \quad \text{.....}$$

$$p(X=k) = \frac{C_{n-1}^k 2^{n-k}}{2 \times 3^{n-1}}; \quad \text{.....} \quad p(X=n) = \frac{C_{n-1}^n 2^0}{2 \times 3^{n-1}}. \quad \text{.....5 分}$$

所以 X 的概率分布为:

X	0	1		k		n
p	$\frac{2^n}{2 \times 3^{n-1}}$	$\frac{C_{n-1}^1 2^{n-1}}{2 \times 3^{n-1}}$		$\frac{C_{n-1}^k 2^{n-k}}{2 \times 3^{n-1}}$		$\frac{C_{n-1}^n 2^0}{2 \times 3^{n-1}}$

因为 $k \geq 2$ 时, $k C_{n-1}^k = k \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = (n-1) \cdot \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!} = (n-1) C_{n-1}^{k-1}$,

$k=1$ 时上式成立, 所以 $k C_{n-1}^k = (n-1) C_{n-1}^{k-1}, k \geq 1$,7 分

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } E(X) &= \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{C_{n-1}^k 2^{n-k}}{2 \times 3^{n-1}} = \frac{1}{2 \times 3^{n-1}} \left(2^n + \sum_{k=1}^n k C_{n-1}^k 2^{n-k} \right) \\
 &= \frac{1}{2 \times 3^{n-1}} \left(2^n + (n-1) \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} 2^{n-k} \right) = \frac{1}{2 \times 3^{n-1}} (2^n + (n-1)(1+2)^{n-1}) \\
 &= \frac{2^n + (n-1) \cdot 3^{n-1}}{2 \times 3^{n-1}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{n-1}{2}. \quad \dots 10 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

答：（1）各数位均不为 0 的概率为 $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ；（2）随机变量 X 的数学期望为 $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{n-1}{2}$ 。

（III）设正整数 $n \geq 3$ ，集合 $P = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ， A, B, C 是 P 的 3 个非空子集，记 a_n

为所有满足： $A \subsetneq B$ ， $B \cap C = \emptyset$ ，且 $A \cup B \cup C = P$ 的有序集合对 (A, B, C) 的个数。

（1）求 a_3 ；（2）求 a_n 。

【解析】（1）当 $n=3$ 时，集合 $P = \{1, 2, 3\}$ ，

因为 A, B, C 是 P 的 3 个非空子集， $A \subsetneq B$ ， $B \cap C = \emptyset$ ，且 $A \cup B \cup C = P$ ，

所以当 $A = \{1\}$ 时， $B = \{1, 2\}$ ， $C = \{3\}$ 或 $B = \{1, 3\}$ ， $C = \{2\}$ ；

当 $A = \{2\}$ 时， $B = \{2, 3\}$ ， $C = \{1\}$ 或 $B = \{2, 1\}$ ， $C = \{3\}$ ；

当 $A = \{3\}$ 时， $B = \{1, 3\}$ ， $C = \{2\}$ 或 $B = \{2, 3\}$ ， $C = \{1\}$ ，

所以 $a_3 = 6$ 。……3 分

（2）当 A 中的元素个数为 $k (1 \leq k \leq n-2, k \in \mathbf{N}^*)$ 时，集合 A 共有 C_n^k 种不同情形，

集合 B 共有 $(2^{n-k} - 2)$ 种不同情形，集合 C 随集合 B 确定而唯一确定，

所以有序集合对 (A, B, C) 的个数为 $C_n^k (2^{n-k} - 2)$ 。……6 分

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } a_n &= \sum_{k=1}^{n-2} C_n^k (2^{n-k} - 2) = \sum_{k=0}^n C_n^k (2^{n-k} - 2) - [C_n^0 (2^n - 2) + C_n^{n-1} (2^1 - 2) + C_n^n (2^0 - 2)] \\
 &= \sum_{k=0}^n C_n^k 2^{n-k} - 2 \cdot \sum_{k=0}^n C_n^k - (2^n - 3) = (1+2)^n - 2 \cdot 2^n - (2^n - 3) = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3. \quad \dots 10 \text{ 分}
 \end{aligned}$$