谈 Dandelin 双球模型的构建及其教学价值①

王海青

(惠州学院数学与大数据学院 516007)

1 问题提出的背景

解析几何以欧几里得的论证几何为基础,通过坐标系以"几何问题→代数问题→求解→反演"的方式将几何代数化,把代数方程与曲线曲面等联系起来,实现了"数与形"的灵活转换.解析的方法更具一般性而不过多地依赖几何图形,它改变了欧几里得几何的论证方法,使几何研究变为代数计算,能由已知的代数结果发现新的几何性质.圆锥曲线作为高中解析几何的核心内容在现实中有非常广泛而重要的应用,一直以来人们致力于寻求其在天文学、军事领域、建筑设计等方面有用的性质.因此,圆锥曲线相关内容的教学对学生数学思维能力和应用意识的培养具有毋庸置疑的重要性.

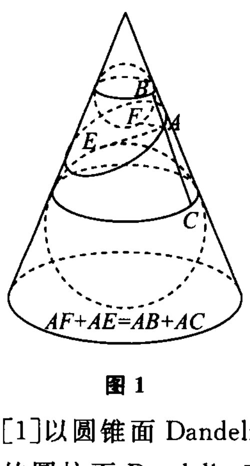

图 1

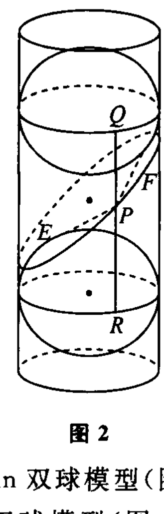

图 2

文[1]以圆锥面 Dandelin 双球模型(图1)和修正后的圆柱面 Dandelin 双球模型(图2)为介质,强调解析几何教学回归"几何性"的重要性,并指出了"解析性"与"几何性"并重的教育价值.[1]解析几何是连接代数与几何的重要桥梁,在教学中过于偏重几何的"解析性"或代数的"几何性"都是不可取的,而是要两者并重强调"数与形"的密切结合.正如文[1]的观点,在圆锥曲线的教学中 Dandelin 双球模型有助于将代数化的性质直观化,反映其原有的几何特征.

但 Dandelin 双球模型还承载着更为重要的教学价值,即其能揭示圆锥曲线中不同曲线的定义、同一曲线的不同定义之间的密切联系,以及三种曲线的特性及其统一性的内在关系.它能实现从"用平面截圆锥所得截线"的原始定义向"到两定点距离之和为一定值"的平面轨迹定义的自然过渡,由三维空间转化为二维平面来探究圆锥曲线的性质.为进一步阐明这个观点,需简要剖析圆锥曲线的教材知识结构与梳理其历史发展脉络.

2 圆锥曲线的教材知识结构

高中数学人教A版选修2-1教科书[2]"圆锥曲线与方程"单元的知识结构如图3,分别介绍了光学性质、原始定义、第一定义、第二定义以及在直角坐标系下的标准方程和统一方程,其中第一定义、标准方程、几何性质及应用是主要内容.原始定义出现在前言部分;椭圆和双曲线的第一定义通过"拉线作图"引出;抛物线的定义利用其切线的性质借助几何画板引出;利用 Dandelin 球说明椭圆的第一定义与原始定义的等价性放在"探究与发现"部分.教材的编排体现了类比、数形结合和分类讨论的数学思想,极力突出原始定义、第一定义和统一定义三者之间的联系,既强调各类圆锥曲线的特性也关注其统一性.

① 基金项目:广东省本科高校高等教育教学改革项目——卓越人才培养模式下职前数学教师整体教学观的形成研究(2016年);广东省教育科学研究项目——基于TPACK框架的数学师范生教学素养发展策略研究(2017GXJK166);惠州学院本科教研教改项目——问题驱动教学的数学课堂研究(JG2018011).

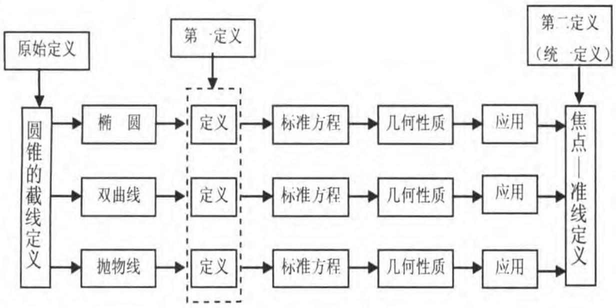

图 3

圆锥曲线可看作是球在光照射下的不同投影，也可看作是平面截圆锥所成的交线，两种方式都是在空间中对圆锥曲线的直观定性描述. 但教材在介绍圆锥曲线的原始定义后，直接过渡到平面用“拉线作图法”引出椭圆第一定义推导标准方程与讨论相应的性质特征. 从空间到平面的直接跨越不免有些突兀，学生难以理解为什么可以这样定义. 圆锥的截线与平面上定义的曲线是同一个轨迹吗? 虽然教材在之后的“探究与发现”中进行了说明，却难以消除学生在学习新概念时造成理解上的极大困扰.

有研究[3－5]证实了这些疑虑，并对椭圆概念的教学提出了改正意见，根据太阳光的投影逐步构建出圆柱面的 Dandelin 双球模型推导出椭圆的焦半径性质并引出椭圆的第一定义，将之与原始定义联系在一起. 圆柱面的 Dandelin 双球模型可以降低学生处理模型的难度，但修正后的模型无法导出双曲线和抛物线的情形. 教学上虽然没有必要用 Dandelin 球模型引出双曲线和抛物线的定义，但圆柱面的 Dandelin 双球模型不足以说服学生消除“如何类似地得到双曲线和抛物线的定义”的疑问. 教师应对教材内容的深广度有恰当的把握，考虑到不同学生的需要使教学设计具有一定的弹性.

3 圆锥曲线的历史发展简介[6]

圆锥曲线可能是古人在制作日晷(如图 4)的过程中观察到其在太阳光下的阴影偶然发现的.[7]39－40阿波罗尼斯(约公元前 262－公元前 190)是第一个依据同一个圆锥截面来研究圆锥曲线理论也是首先发现双曲线有两支的人. 其所著的《圆锥曲线论》[8]几乎网罗了圆锥曲线的性质，成为数学史上的一座丰碑. 阿波罗尼斯从几何直观上给出了圆锥曲线静态的原始定义：用一个平面去截一个圆锥面，得到的交线就称为圆锥曲线(如图 5). 他利用繁杂的论证几何方法推导出圆锥曲线的重要性质. 如：圆锥线上一点 P 与焦点相连的两线 PF 及 PF' 与 P 处的切线交于等角；焦距 PF 与 PF' 之和(对椭圆的情形)等于 AA'，焦距之差(对双曲线的情形)等于 AA'(如图 6－7). 前一个是椭圆和双曲线的光学性质，后一个是它们的焦半径性质，也就是现在教材中的第一定义. 圆锥曲线的焦点－准线性质则是由古希腊后期的数学家帕普斯(公元 3 世纪末)给予了证明[9]172. 教材将之称为圆锥曲线的第二定义或统一定义.

图 4

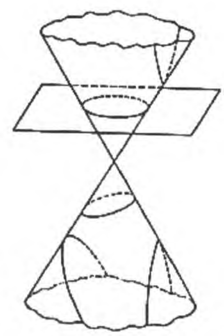

图 5

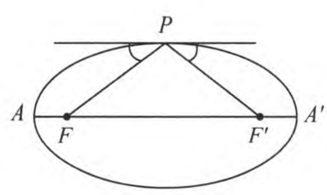

图 6

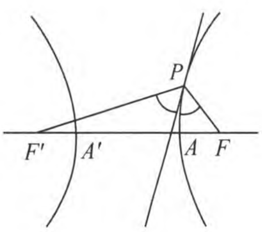

图 7

直到 16 世纪，人们才发现圆锥曲线也是自然界物体运动的普遍形式. 为便于研究，1579 年意大利数学家蒙特(1545－1607)将椭圆定义为：到两个焦点距离之和为定长的动点的轨迹，并利用定义讨论了他制造的椭圆规，如图 8.[10]230解析几何的出现大大促进了圆锥曲线理论的发展，此后论证几何的研究方法被逐渐摈弃，人们朝着解析法的方向发展. 沃利斯(1616－1703)第一次用方程分别定义了椭圆、抛物线和双曲线.[7]264欧拉(1707－1783)给出了统一的代数方程定义：在笛卡尔平面上，二元二次方程 $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的图像是圆锥曲线.[11]36－41射影几何与解析几何几乎在同一时期产生，它主要研究几何图形在投影变换下保持不变的性质. 德萨格

(1593－1662)首先将射影几何思想用于研究圆锥曲线考察它的射影性质，他将圆锥曲线直观定义为：圆在平面上的投影(如图 9).[10]158德萨格通过投影和截景提供了统一处理圆锥曲线的简便方法，将圆的性质推到任一类圆锥曲线上.

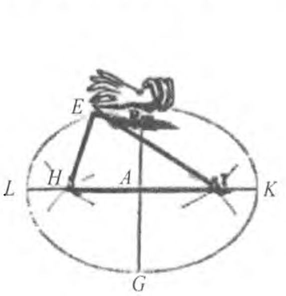

图 8

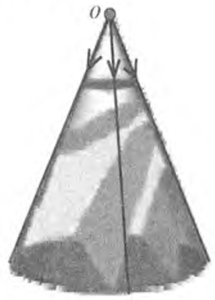

图 9

用综合法证明圆的截景是圆锥曲线的一个直观简洁的初等方法是由比利时数学家 G. F. Dandelin 1822 年给出的.[1]以椭圆为例，如图 1，在截面的上、下方各作一个与圆锥内切的球，同时和截面相切于 E,F. 在截面的交线上任取一点 A，过点 A 引圆锥的母线交两球的切圆于点 B,C. 由球的切线性质得到：$AE=AC$,$AF=AB$，则 $AF+AE=AB+AC=BC$，而线段 BC 的长为定值，B,C 为定点，得证. 利用同一个模型可以证明原始定义与焦点－准线定义的等价性.

可见，圆锥曲线的定义和研究方法的改变反映了几何学的发展变化过程. 从欧氏几何到射影几何再到解析几何，圆锥曲线的定义经历了原始定义、平面上动点的轨迹定义、射影定义、标准方程定义、焦点－准线定义、代数方程的统一定义的变化过程. 而研究方法从欧氏几何的纯几何综合法到射影几何的方法，再到以坐标为媒介的解析法，经历了由繁到简、定性研究到定量研究的变化过程. 图 10[6]反映了在欧氏几何和解析几何的框架下圆锥曲线定义的变化及相互关系.

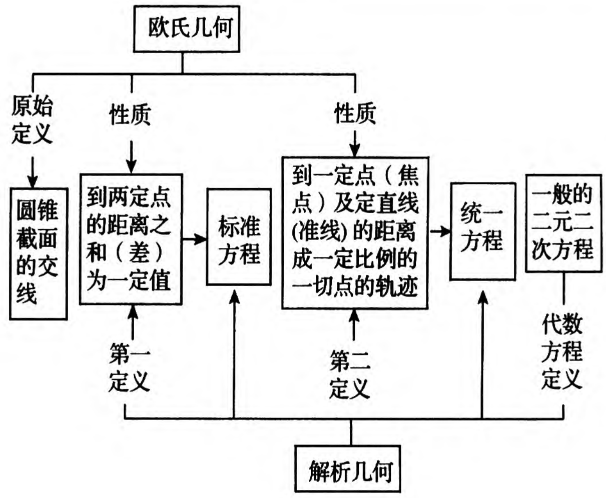

图 10

4　Dandelin 双球模型的教学价值以及模型重构

4.1　Dandelin 双球模型的教学价值

教学不能脱离知识产生的源头，否则就成了“无源之水、无本之木”. 用平面截圆锥所成的截线或球在光源下的投影是圆锥曲线的初始定义，然后才从三维空间的原始定义过渡到二维平面的轨迹定义及方程定义. 因此，教学的起点应该从原始定义展开探究. 但数学发展到今天，已经没有必要让学生去经历阿波罗尼斯繁杂的论证几何方法，而且“圆锥曲线与方程”单元的重心是用解析法而不是几何的综合法处理圆锥曲线的相关性质.

如何将圆锥曲线中不同曲线的定义、同一曲线的不同定义有机联系起来形成一个紧密的知识结构？Dandelin 双球模型是很好的媒介. 教师可以选择学生熟悉的直观形象的“球在光源下的投影”来抽象出 Dandelin 双球模型. 进而在处理模型的过程中引出平面的轨迹定义，实现从三维空间向二维平面的转化与过渡，这也正是 Dandelin 双球模型的重要教学价值. 由于教材内容的编排顺序及其知识结构，决定了椭圆概念是实现圆锥曲线定义从空间向平面自然过渡的重要支点.

4.2　Dandelin 双球模型的重构与椭圆概念的引出

如果直接呈现 Dandelin 双球模型推导椭圆的焦半径性质从而引出第一定义，学生的最大困惑在于：这么巧妙的模型是怎么想到的？教学上的困难是：如何降低对立体模型的理解和证明难度？

结合学生的生活实际，可以先介绍日常声学现象，如在某些建筑内部的某个位置能听到远处的窃窃私语，对着山谷大喊紧接着也能听到同样的回声(如图 11). 由此激发学生的兴趣并抽象出相应的几何图形(如图 12)引出一个重要概念——椭圆的焦点，进而提出问题：椭圆上的点与这两个焦点有什么联系？

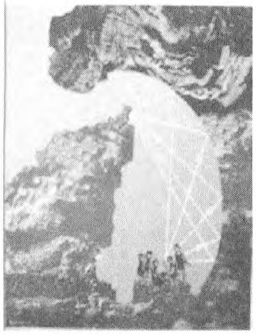

图 11

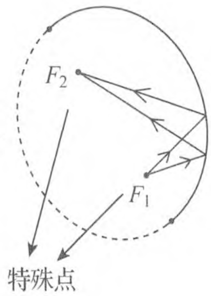

图 12

带着问题通过动手实验让学生感受球在灯光下的投影，其中一种情形如图 13，投影为椭圆，球与桌面相切于一点. 由光源电灯发出的光束与球相切成圆锥状，并使球内切于圆锥. 将实际情形抽象转化为几何图形如图 14，点 F_1 为球与桌面即椭圆的切点. 球内切于圆锥，球与圆锥相切的所有点构成一个如图 14 所示的切圆. 因为光线是可逆的，从点光源发出的光束也可以看作是一束光聚焦到点光源 A 上. 所以椭圆的投影也可以看作是由桌面下方与桌面相切于点 F_2 的另一个球的投影，从而构造出 Dandelin 双球模型，如图 15.

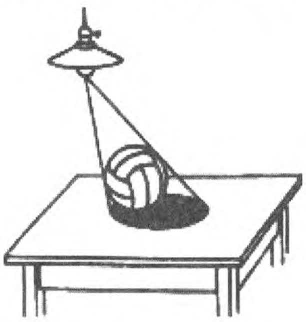

图 13

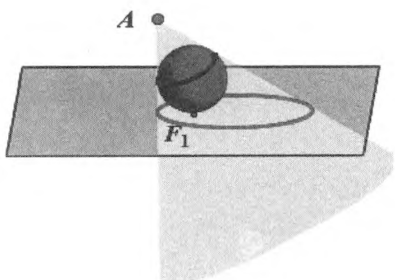

图 14

椭圆上的任一点 P 与两个切点满足怎样的数量关系？如对前图 1 的分析，容易得到椭圆的焦半径性质：椭圆上的点 P 到两个定点 F_1、F_2 的距离之和为定值（如图 16）. 原始定义是在空间中对圆锥曲线直观的定性描述，不利于性质的探讨和推演. 椭圆的焦半径性质是在平面上的一个定量化结果，与平面直角坐标系有着天然的联系. 因此，可以考虑运用椭圆的焦半径性质来定义椭圆，从而引领学生经历概念的获得、深化、固化与应用过程.

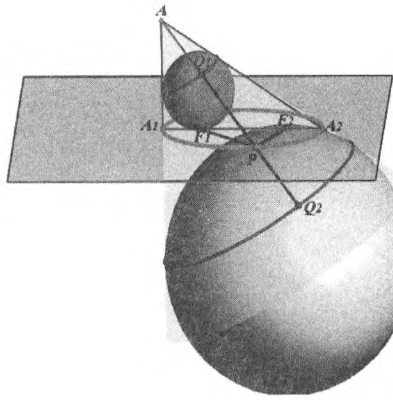

图 15

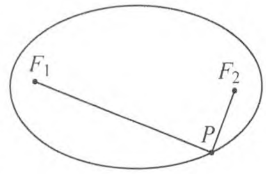

图 16

以学生熟悉的生活场景构建出 Dandelin 双球模型，从生活世界向符号世界过渡，实现“横向数学化”. 然后在剖析 Dandelin 双球模型的过程中获得椭圆的焦半径性质进而引出第一定义，从三维空间转化为二维平面并从符号世界过渡到数学世界，实现“纵向数学化”. Dandelin 双球模型的构建与椭圆概念的引出使圆锥曲线的不同定义有机联系在一起，也充分体现了弗赖登塔尔的数学教育观——用“数学化”[12] 的方式组织教学. 教学设计过程重视数学建模思想的渗透及强调直观想象与数学抽象的结合，这有助于发展学生的数学核心素养.

参考文献

[1]张劲松. 由光线照球的投影谈解析几何发展数学核心素养的举措[J]. 数学通报，2018，57(6)：23－27

[2]人民教育出版社课程教材研究所. 普通高中课程标准实验教科书 A 版 · 数学（选修 2－1）[M]. 北京：人民教育出版社，2015

[3]汪晓勤，王苗，邹佳晨. HPM 视角下的数学教学设计：以椭圆为例[J]. 数学教育学报，2011，20(5)：20－23

[4]徐迪斐. “圆锥曲线”起始课教学设计[J]. 中国数学教育，2015(5)：2－8

（下转第 18 页）

2.2.2 学情状况角度

选择什么样的教学方式还要考虑学生的学情.如前文所述,探究学习是具有问题性、主动性、过程性等一些特征的学习方式,对学生的认知水平和学习习惯有较高的要求.从班级整体状况来看,如果班级整体学力水平比较高,且思维比较活跃,建议以探究为主,接受为辅,即在"探究中接受",如按照这样的过程设计"勾股定理":"直角三角形三边之间存在平方关系→画直角三角形测量三边,猜测→方格纸计算正方形面积→形成猜想",探究中包含了接受;如果班级整体学力水平不高,或思维不够活跃,建议以接受为主,探究为辅,即在"接受中探究",如按照这样的过程设计"勾股定理":"直角三角形三边之间存在平方关系→画直角三角形测量三边,猜测→技术手段准确测量→形成猜想",至于直角三角形三边的关系和正方形的面积关系则可以在结论得到之后,在例题或习题中体现形的一面,接受中也渗透了一定的探究的思想.

从不同年龄段来看,对学生的探究水平也应有不同的要求,即探究的问题、探究的方法应考虑到不同年龄段的学生在思维水平、活动经验等方面的差异.以初中阶段的"综合与实践"活动为例,可以区分为以下三种探究水平:

水平/内容	研究课题	活动方式	活动要求	案例
水平一(七年级)	明确、具体	以操作性数学活动为主,要求判断、提出猜想并进行说理	独立思考、合作交流;注重探究、逐步积累经验	幻方[6]
水平二(八年级)	主题明确,但具体的研究问题由学生经小组讨论后形成	以抽象、建立数学模型,推理和判断,回顾与反思为主	独立与合作结合、注重探究与推理、积累活动经验	一次函数模型[7]
水平三(九年级)	仅给出现象,明确的主题和需要解决的具体问题由学生经小组讨论后形成	以抽象、推理、判断和设计,回顾与反思为主	独立思考、合作交流、注重推理、积累活动经验	猜想、证明与拓广[8]

考虑到受传统教学模式的影响,教师教学方式的单一,学生在数学思考和问题解决方面的欠缺,目前我们适当向探究学习倾斜是需要的.当然除了知识内容和学情状况影响之外,采用探究还是接受还取决于多种因素,如具体的教学目标和任务、教学设备、学习环境、教师的能力、风格等.立足教材,关注学生永远是正确的!

参考文献

[1]钟启泉编译.现代教学论发展[M].北京:教育科学出版社,1988:363
[2]柴西琴.对探究教学的认识与思考[J].课程·教材·教法,2001(8):17
[3]宋乃庆.中国基础教育新课程的理念与创新[M].北京:中国人事出版社,2002:106
[4]巩子坤.数学知识的特征与学习方式的有效选择[J].中国教育学刊,2005(11):55-58
[5]马复主编.义务教育数学课程标准实验教科书 七上[M].北京:北京师范大学出版社,2014:189-190
[6]马复主编.义务教育数学课程标准实验教科书 八上[M].北京:北京师范大学出版社,2014:189-190
[7]马复主编.义务教育数学课程标准实验教科书 九上[M].北京:北京师范大学出版社,2014:166-170

(上接第13页)

[5]陈锋,王芳.基于旦德林双球模型的椭圆定义教学[J].数学教学,2012(4):5-8+40
[6]王海青.从阿波罗尼斯到柯西:"圆锥曲线"研究方法的变迁[J].数学通报,2018,56(10):26-31
[7]莫里斯·克莱因.古今数学思想(第一册)[M].张理京,等译.上海:上海科学技术出版社,2014
[8]阿波罗尼斯著.圆锥曲线论[M].朱恩宽,等译.西安:陕西科学技术出版社,2007
[9]霍华德·伊夫斯.数学史概论[M].6版.欧阳绛,译.哈尔滨:哈尔滨工业大学,2013
[10]《数学辞海》编辑委员会.数学辞海(第六卷)[M].太原:山西教育出版社,2002
[11]白尚恕.圆锥曲线小史[J].数学通报,1964(2):36-41
[12]弗莱登塔尔.数学教育再探[M].上海:上海教育出版社,1999