高三周三数学附加训练 12　　　2019.12.4

班级___________　　学号___________　　姓名__________

1. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{bmatrix}$的一个特征值为 2，其对应的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.求实数 a，b 的值.

2.在平面直角坐标系 xOy 中，以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．直线 l：$\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=m(m\in\mathbf{R})$,圆 C 的参数方程为$\begin{cases} x=1+3\cos t, \\ y=-2+3\sin t \end{cases}$(t 为参数). 当圆心 C 到直线 l 的距离为$\sqrt{2}$时，求 m 的值.

3. 甲、乙、丙分别从 A，B，C，D 四道题中独立地选做两道题，其中甲必选 B 题．

(1) 求甲选做 D 题，且乙、丙都不选做 D 题的概率；

(2) 设随机变量 X 表示 D 题被甲、乙、丙选做的次数．求 X 的概率分布和数学期望 E(X)．

4.已知等式$(1+x)^{2n-1}=(1+x)^{n-1}(1+x)^{n}$.

(1) 求$(1+x)^{2n-1}$的展开式中含 x^n 的项的系数，并化简：$C_{n-1}^{0}C_{n}^{n}+C_{n-1}^{1}C_{n}^{n-1}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}C_{n}^{1}$；

(2) 求证：$(C_{n}^{1})^{2}+2(C_{n}^{2})^{2}+\cdots+n(C_{n}^{n})^{2}=nC_{2n-1}^{n}$.

高三周三数学附加练习（12）答案　　2019.12.4

1.**解**：由条件知，$A\alpha=2\alpha$，即$\begin{bmatrix}1 & a\\-1 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，即$\begin{bmatrix}2+a\\-2+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$，(6 分)

所以$\begin{cases}2+a=4,\\-2+b=2,\end{cases}$　解得$\begin{cases}a=2,\\b=4.\end{cases}$

所以实数 a，b 的值分别为 2，4.(10 分)

2. **解**：直线 l 的直角坐标方程为 $x-y+m=0$，

圆 C 的普通方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=9$，(5 分)

圆心 C 到直线 l 的距离为$\frac{|1-(-2)+m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，解得 $m=-1$ 或 $m=-5$.(10 分)

3. **解**：(1) 设“甲选做 D 题，且乙、丙都不选做 D 题”为事件 E.

甲选做 D 题的概率为$\frac{C_1^1}{C_3^1}=\frac{1}{3}$，乙、丙不选做 D 题的概率都是$\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$.

则 $P(E)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$.

答：甲选做 D 题，且乙、丙都不选做 D 题的概率为$\frac{1}{12}$.(3 分)

(2) X 的所有可能取值为 0，1，2，3.(4 分)

$P(X=0)=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,

$P(X=1)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times C_2^1\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$,

$P(X=2)=\frac{1}{3}\times C_2^1\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times C_2^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}$,

$P(X=3)=\frac{1}{3}\times C_2^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$.(8 分)

所以 X 的概率分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{12}=\frac{4}{3}$.(10 分)

4. (1) **解**：$(1+x)^{2n-1}$ 的展开式中含 x^n 的项的系数为 C_{2n-1}^n.(1 分)

由$(1+x)^{n-1}(1+x)^n=(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1x+\cdots+C_{n-1}^{n-1}x^{n-1})(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n)$可知，

$(1+x)^{n-1}(1+x)^n$ 的展开式中含 x^n 的项的系数为 $C_{n-1}^0C_n^n+C_{n-1}^1C_n^{n-1}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}C_n^1$.

所以 $C_{n-1}^0C_n^n+C_{n-1}^1C_n^{n-1}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}C_n^1=C_{2n-1}^n$.(4 分)

(2) **证明**：当 $k\in\mathbf{N}^*$时，$kC_n^k=k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=nC_{n-1}^{k-1}$.(6 分)

所以$(C_n^1)^2+2(C_n^2)^2+\cdots+n(C_n^n)^2=C_n^1\cdot nC_{n-1}^0+C_n^2\cdot nC_{n-1}^1+C_n^3\cdot nC_{n-1}^2+\cdots+C_n^n\cdot nC_{n-1}^{n-1}$

$=nC_n^1\cdot C_{n-1}^{n-1}+nC_n^2\cdot C_{n-1}^{n-2}+nC_n^3\cdot C_{n-1}^{n-3}+\cdots+nC_n^n\cdot C_{n-1}^0$

$=n[C_n^1\cdot C_{n-1}^{n-1}+C_n^2\cdot C_{n-1}^{n-2}+C_n^3\cdot C_{n-1}^{n-3}+\cdots+C_n^n\cdot C_{n-1}^0]$ 由（2）得

$n[C_n^1\cdot C_{n-1}^{n-1}+C_n^2\cdot C_{n-1}^{n-2}+C_n^3\cdot C_{n-1}^{n-3}+\cdots+C_n^n\cdot C_{n-1}^0]=nC_{2n-1}^n$

所以$(C_n^1)^2+2(C_n^2)^2+\cdots+n(C_n^n)^2=nC_{2n-1}^n$.(10 分)