

2021 ~ 2022 学年度上学期无锡市高三期中质量检测
数 学 试 卷¹

2021.11.9

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.）

1. 已知集合 $A = \{x|y = \sqrt{2-x}\}$ ，集合 $B = \{x|y = \ln(x-1)\}$ ，则 $A \cap B$ 等于 ()
 A. $\{x|1 < x \leq 2\}$ B. $\{x|1 \leq x \leq 2\}$ C. $\{x|1 < x < 2\}$ D. $\{x|x \geq 2\}$
2. 设复数 z 满足 $2z + \bar{z} = 3 + 6i$ ，则 z 等于 ()
 A. $1 + 2i$ B. $1 + 6i$ C. $3 + 2i$ D. $3 + 6i$
3. “ $a \in [0, 1]$ ”是“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - ax + 1 > 0$ ”成立的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 《莱因德纸草书》是世界上最古老的数学著作之一，书中有这样一道题：把 100 个面包分给 5 个人，使每人所得面包个数成等差数列，且使较大的三份之和的 $\frac{1}{7}$ 是较小的两份之和. 则最小的一份为 ()
 A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{11}{6}$
5. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象与函数 $y = 2^x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称，函数 $g(x)$ 是奇函数，且当 $x > 0$ 时， $g(x) = f(x) + x$ ，则 $g(-4) =$ ()
 A. -18 B. -12 C. -8 D. -6
6. 已知 $\alpha \in (-\pi, 0)$ ，且 $3\cos 2\alpha + 4\cos \alpha + 1 = 0$ ，则 $\tan \alpha$ 等于 ()
 A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $-2\sqrt{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
7. 已知向量 $\vec{OA} = (1, 3)$ ，向量 $\vec{OB} = (3, t)$ ， $|\vec{AB}| = 2$ ，则 $\cos\langle \vec{OA}, \vec{AB} \rangle$ 等于 ()
 A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$
8. 已知函数 $f(x) = e^{x-2} + e^{-x+2} + a \sin\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ 有且只有一个零点，则实数 a 的值为 ()
 A. 4 B. 2 C. -2 D. -4

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9. 已知实数 x, y 满足 $a^x < a^y (0 < a < 1)$ ，则下列关系式恒成立的有 ()
 A. $x^3 > y^3$ B. $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ C. $\ln(x-y+1) > 0$ D. $\sin x > \sin y$
10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0, \\ e^x, & x \geq 0, \end{cases}$ 满足对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) \geq ax$ 恒成立，则实数 a 的取值可

以是 ()

- A. $-2\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

11. 任取一个正整数,若是奇数,就将该数乘3加1;若是偶数,就将该数除以2.反复进行上述运算,经过有限次步骤,必进入循环圈 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.这就是数学史上著名的“冰雹猜想”(又称“角谷猜想”).如果对于正整数 m ,经过 n 步变换,第一次到达1,就称为 n 步“雹程”.如取 $m=3$,由上述运算法则得出: $3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$,共需经过7个步骤变成1,得 $n=7$.则下列命题正确的有 ()

- A. 若 $n=2$,则 m 只能是4
B. 当 $m=17$ 时, $n=12$
C. 随着 m 的增大, n 也增大
D. 若 $n=7$,则 m 的取值集合为 $\{3, 20, 21, 128\}$.

12. 已知函数 $f(x) = \sin|x| + |\cos x|$,下列叙述正确的有 ()

- A. 函数 $y = f(x)$ 的周期为 2π
B. 函数 $y = f(x)$ 是偶函数
C. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递减
D. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}. |f(x_1) - f(x_2)| \leq \sqrt{2}$

三、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共计20分.)

13. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $a_{n+1} = 2S_n + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$,则 $a_1 =$ _____ .
14. 已知函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x - \cos x$,则 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ _____ .
15. 已知 $\triangle ABC$ 是腰长为1的等腰直角三角形,角A为直角,点P为平面ABC上的一点,则 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ 的最小值为 _____ .
16. 函数 $f(x) = x^2 - ax - 1$ 的零点个数为 _____ ;当 $x \in [0, 3]$ 时, $|f(x)| \leq 5$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为 _____ .

四、解答题(本大题共6小题,共70分,解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (10分)在①、②两个条件中任取一个填入下面的横线上,并完成解答.

- ①在 $(0, 2\pi)$ 上有且仅有4个零点;
②在 $(0, 2\pi)$ 上有且仅有2个极大值点和2个极小值点.

设函数 $f(x) = \sin\left(\frac{\omega x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) (\omega \in \mathbf{N}^*)$,且满足 _____ .

- (1)求 ω 的值;
(2)将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图像,求 $g(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上的单调递减区间.

18. (12分)我们知道,函数 $y = f(x)$ 的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数 $y = f(x)$ 为奇函数,有同学发现可以将其推广为:函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $P(a, b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y = f(x+a) - b$ 为奇函数.

- (1)请写出一个图象关于点 $(-1, 0)$ 成中心对称的函数解析式;
(2)利用题目中的推广结论,求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ 图象的对称中心.

19. (12分) 在锐角三角形 ABC 中, 已知 $\tan 2A = \frac{\sin A}{\cos A - 1}$.

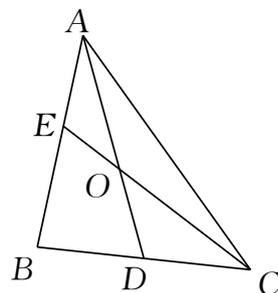
(1) 求角 A 的值;

(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$, 求 $b+c$ 的取值范围.

20. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=2$, $AC=\sqrt{11}$, $\cos \angle BAC = \frac{5\sqrt{11}}{22}$, D 为 BC 的中点, E 为 AB 边上的一个动点, AD 与 CE 交于点 O . 设 $\vec{AE} = x\vec{AB}$.

(1) 若 $x = \frac{1}{4}$, 求 $\frac{CO}{OE}$ 的值;

(2) 求 $\vec{AO} \cdot \vec{CE}$ 的最小值.



21. (12分) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前项积为 T_n , 且满足 $a_n = \frac{T_n}{3T_n - 1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求证: 数列 $\left\{T_n - \frac{1}{2}\right\}$ 为等比数列;

(2) 若 $a_1 + a_2 + \dots + a_n > 10$, 求 n 的最小值.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = e^{x-m} - \ln x$ ($m \geq 0$).

(1) 当 $m=0$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{e} - 1$, 求实数 m 的值.