高二数学中档题小练（21.4.21）

限时：60分钟

范围：导数及其应用、复数、综合法求角和距离、排列组合二项式定理

一．单选题（本大题共6小题）

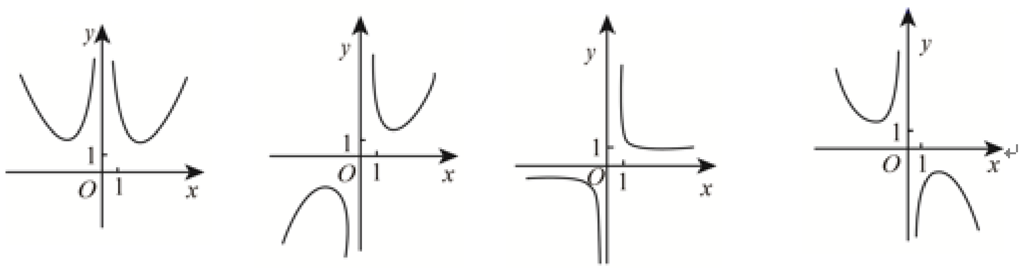
1.已知正实数 a，b 满足（$a+bi$）^{2}＝﹣7+24i，则复数 $a+bi$ 为（　　）

A．4+3i　　　　B．4﹣3i　　　　C．3+4i　　　　D．3﹣4i

2．若 $C_{20}^{2x-1}=C_{20}^{x+3}$，则 x 的值为（　）

A．4 或 6　　　　B．4 或 5　　　　C．6　　　　D．4

3．函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{x^{2}}$ 的图像大致为（　　）



A　　　　B　　　　C　　　　D

4．已知 $(3+x-x^2)^6=a_0+a_1(1-x)+a_2(1-x)^2+a_3(1-x)^3+\cdots+a_{12}(1-x)^{12}$，则

$a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=(\quad)$

A．364　　　　B．-364　　　　C．365　　　　D．-365

5．甲、乙、丙 3 位志愿者安排在周一至周五的 5 天中参加某项志愿者活动，要求每人参加一天且每天至多安排一人，并要求甲安排在另外两位前面，不同的安排方法共有（　　）

A．20 种　　　　B．30 种　　　　C．40 种　　　　D．60 种

6．已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$（其中 $x_1<x_2<x_3$），$g\left(x\right)=e^x-e^{-x}$，且函数 $f(x)$ 的两个极值点为 $\alpha,\beta\left(\alpha<\beta\right)$．设 $\lambda=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$\mu=\dfrac{x_2+x_3}{2}$，则(　　)

A．$g\left(\alpha\right)<g\left(\lambda\right)<g\left(\beta\right)<g\left(\mu\right)$　　　　B．$g\left(\lambda\right)<g\left(\alpha\right)<g\left(\beta\right)<g\left(\mu\right)$

C．$g\left(\lambda\right)<g\left(\alpha\right)<g\left(\mu\right)<g\left(\beta\right)$　　　　D．$g\left(\alpha\right)<g\left(\lambda\right)<g\left(\mu\right)<g\left(\beta\right)$

二．不定项选择题（本大题共 2 小题）

7.已知复数 z 满足（1－i）z＝2i，则下列关于复数 z 的结论正确的是　　　　（　　）

A．$|z|=\sqrt{2}$　　　　B．复数 z 的共轭复数为 $\overline{z}$＝－1－i

C．复平面内表示复数 z 的点位于第二象限　D．复数 z 是方程 $x^2+2x+2=0$ 的一个根

8.已知函数 f（x）＝$x\ln x$，若 0＜x_1＜x_2，则下列结论正确的是（　　）

A．x_2f（x_1）＜x_1f（x_2）　　　　B．x_1+f（x_1）＜x_2+f（x_2）

C．$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$　　　　D．当 $\ln x$＞－1 时，x_1f（x_1）+x_2f（x_2）＞2x_2f（x_1）

三、填空题（本大题共 4 小题）

9．曲线 $y=e^x-\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为____________.

10．$\left(x^3-\dfrac{1}{2x^2}\right)^n$ 的展开式共有 11 项，则 n 的值为_________，其中常数项为___________.

11．在正三棱锥 $A-BCD$ 中，侧棱长为 3，底面边长为 2，则点 A 到平面 BCD 的距离为_________；AB 与面 ACD 所成角的余弦值为__________.

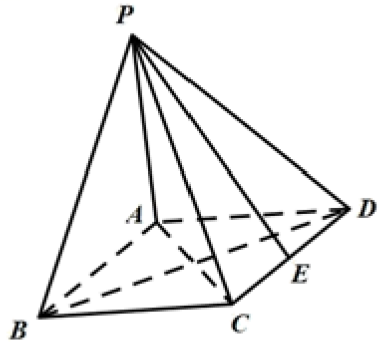
四、解答题（本大题共 3 小题）

12.在①z 为纯虚数，②z 为虚数，③z＜0，这三个条件中任选一个，补充在下面问题中．已知复数：z＝（m^2－2m－8）+（m^2－4）i．

⑴ 若______，求实数 m 的值；

⑵ 若复数 $z-m^2$（1+i）+8 的模为 $2\sqrt{5}$，求 m 的值．

13． 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是菱形，$\angle ABC=60^{\circ}$，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AB$，E为CD的中点.



（Ⅰ）求证：$BD\perp PC$；

（Ⅱ）求直线PE与平面PAC所成角的正弦值.

14．已知函数 $f(x)=x^2+2x+a\ln x$.

(Ⅰ)若函数 $f(x)$在区间$(0,1)$上是单调函数，求实数a的取值范围；

(Ⅱ)当$t\geq 1$时，不等式 $f(2t-1)\geq 2f(t)-3$恒成立，求实数a的取值范围.

高二数学中档题小练（21.4.21）

限时：60分钟

范围：导数及其应用、复数、综合法求角和距离、排列组合二项式定理

一．单选题（本大题共6小题）

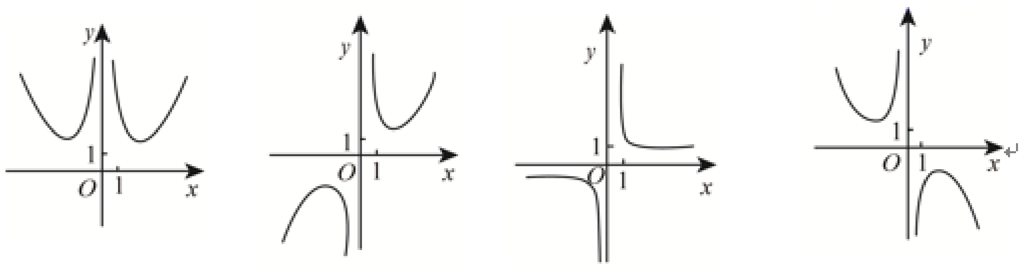
1.已知正实数 a，b 满足（$a+bi$）^{2}＝﹣7+24i，则复数 $a+bi$ 为（　　）C

A．4+3i　　　　B．4﹣3i　　　　C．3+4i　　　　D．3﹣4i

2．若 $C_{20}^{2x-1}=C_{20}^{x+3}$，则 x 的值为（　）A

A．4 或 6　　　　B．4 或 5　　　　C．6　　　　D．4

3．函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{x^{2}}$ 的图像大致为（　　)B



A　　　　　B　　　　　C　　　　　D

4．已知 $(3+x-x^2)^6=a_0+a_1(1-x)+a_2(1-x)^2+a_3(1-x)^3+\cdots+a_{12}(1-x)^{12}$，则

$a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=($　　$)$C

A．364　　　　B．-364　　　　C．365　　　　D．-365

5．甲、乙、丙 3 位志愿者安排在周一至周五的 5 天中参加某项志愿者活动，要求每人参加一天且每天至多安排一人，并要求甲安排在另外两位前面，不同的安排方法共有（　　）A

A．20 种　　　　B．30 种　　　　C．40 种　　　　D．60 种

6．已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$（其中 $x_1<x_2<x_3$），$g\left(x\right)=e^x-e^{-x}$，且函数 $f(x)$ 的两个极值点为 $\alpha,\beta\left(\alpha<\beta\right)$．设 $\lambda=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$\mu=\dfrac{x_2+x_3}{2}$，则(　　)D

A．$g\left(\alpha\right)<g\left(\lambda\right)<g\left(\beta\right)<g\left(\mu\right)$　　　　B．$g\left(\lambda\right)<g\left(\alpha\right)<g\left(\beta\right)<g\left(\mu\right)$

C．$g\left(\lambda\right)<g\left(\alpha\right)<g\left(\mu\right)<g\left(\beta\right)$　　　　D．$g\left(\alpha\right)<g\left(\lambda\right)<g\left(\mu\right)<g\left(\beta\right)$

二．不定项选择题（本大题共 2 小题）

7.已知复数 z 满足（1 - i）z＝2i，则下列关于复数 z 的结论正确的是（　　）ABCD

A．$|z|=\sqrt{2}$　　B．复数 z 的共轭复数为 $\overline{z}$＝ - 1 - i

C．复平面内表示复数 z 的点位于第二象限　D．复数 z 是方程 $x^2+2x+2=0$ 的一个根

8.已知函数 $f(x)=x\ln x$，若 $0<x_1<x_2$，则下列结论正确的是（　　）AD

A．$x_2f(x_1)<x_1f(x_2)$　　B．$x_1+f(x_1)<x_2+f(x_2)$

C．$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$　　D．当 $\ln x>-1$ 时，$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>2x_2f(x_1)$

三、填空题（本大题共 4 小题）

9．曲线 $y=e^x-\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为______．　$y=(e+1)x-2$

10．$\left(x^3-\dfrac{1}{2x^2}\right)^n$ 的展开式共有 11 项，则 n 的值为______10___，其中常数项为

___________．$\dfrac{105}{32}$

11. 在正三棱锥 $A-BCD$ 中，侧棱长为 3，底面边长为 2，则点 A 到平面 BCD 的距离为

_________；AB 与面 ACD 所成角的余弦值为__________．$\dfrac{\sqrt{69}}{3},\dfrac{7\sqrt{2}}{12}$

四、解答题（本大题共 3 小题）

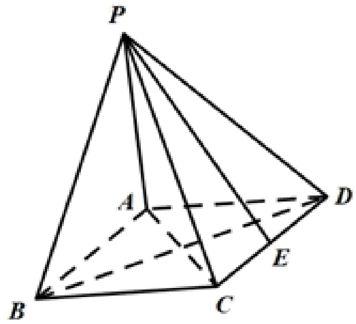
12.在①z 为纯虚数，②z 为虚数，③$z<0$，这三个条件中任选一个，补充在下面问题中．已知复数：$z=(m^2-2m-8)+(m^2-4)i$．

⑴ 若______，求实数 m 的值；

⑵ 若复数 $z-m^2(1+i)+8$ 的模为 $2\sqrt{5}$，求 m 的值．

12.解：（1）选择①z 为纯虚数，则 $m^2-2m-8=0$，$m^2-4\neq0$，解得 $m=4$．选择②z 为虚数，则 $m^2-4\neq0$，解得 $m\neq\pm2$．选择③$z<0$，则 $\begin{cases}m^2-2m-8<0\\m^2-4=0\end{cases}$，解得 $m=2$．（2）$z=(m^2-2m-8)+(m^2-4)i$ 可知复数 $z-m^2(1+i)+8=(m^2-2m-8)+(m^2-4)i-m^2(1+i)+8=-2m-4i$，　依题意 $\sqrt{(-2m)^2+16}=2\sqrt{5}$，解得 $m=\pm1$，

13． 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是菱形，$\angle ABC=60^{\circ}$，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AB$，E为CD的中点.



（Ⅰ）求证：$BD\perp PC$；

（Ⅱ）求直线PE与平面PAC所成角的正弦值.

（Ⅰ）在菱形$ABCD$中，有$BD\perp AC$,由$PA\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，所以$BD\perp PA$，又$PA\cap AC=A, PA, AC\subset$平面$PAC$

所以$BD\perp$平面PAC，又$PC\subset$平面PAC，所以$BD\perp PC$

（Ⅱ）作$EF\perp AC$交AC于点F，连接AE, EF, PF，设$AB=2$

如图，由$\angle ABC=60^{\circ}$，E为CD的中点，所以$AE=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，且$F$为$OC$的中点。

又$PA=AB$，所以$PA=2$，则$PE=\sqrt{PA^2+AE^2}=\sqrt{7}$ 由（Ⅰ）可知：$BD\perp$平面PAC，而$EF\,//\,BD$所以$EF\perp$平面PAC，所以直线PE与平面PAC所成角为$\angle CEP$

又$DO=AE=\sqrt{3}$，所以$EF=\dfrac{DO}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$所以$\sin\angle CEP=\dfrac{EF}{PE}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

故直线PE与平面PAC所成角的正弦值$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

14．已知函数$f(x)=x^2+2x+a\ln x$.

(Ⅰ)若函数$f(x)$在区间$(0,1)$上是单调函数，求实数a的取值范围；

(Ⅱ)当$t\geq 1$时，不等式$f(2t-1)\geq 2f(t)-3$恒成立，求实数a的取值范围.

解：（Ⅰ）函数$f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$， $f'(x)=2x+2+\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2+2x+a}{x}$，因为函数$f(x)$在区间（0，1）上为单调函数所以只需$f'(x)\geq 0$或$f'(x)\leq 0$在区间（0，1）上恒成立，即$a\geq -(2x^2+2x)$或$a\leq -(2x^2+2x)$在区间（0，1）上恒成立，

解得$a\geq 0$,或$a\leq -4$;故实数a的取值范围是$(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$

（Ⅱ）不等式 $f(2t-1)\geq 2f(t)-3$ 可化为 $2t^2-4t+2\geq a\ln t^2-a\ln(2t-1)$

即 $2t^2-a\ln t^2\geq 2(2t-1)-a\ln(2t-1)$ 记 $g(x)=2x-a\ln x(x\geq 1)$，要使上式成立

只须 $g(x)=2x-a\ln x(x\geq 1)$ 是增函数即可即 $g'(x)=2-\dfrac{a}{x}\geq 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，即

$a\leq 2x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，故 $a\leq 2$，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.