

借助问题驱动 发展核心素养

——“空间两条直线的位置关系”教学实录与反思

桑娅洁 (江苏省徐州高级中学 221003)

1 基本情况

在2021年徐州市教学优质课评比中,笔者执教了“空间两条直线的位置关系”一课,得到了评委的认可与好评,获得高中数学学科组一等奖.本文将这节课的实录与反思整理如下,与大家交流.

1.1 授课对象

学生来自江苏省四星级高中普通班,数学基础总体较好,具备一定的数学抽象、逻辑推理、直观想象等数学学科核心素养.

1.2 教材分析

本节课是高中数学必修2(苏教版)第13章中“空间两条直线的位置关系”第一课时.在此之前,学生对基本立体图形有了直观的认识,了解了平面的概念和基本性质,能用符号语言描述空间点、直线、平面之间的位置关系,学习了用图形、文字、符号三种语言描述三个基本事实,为本节课的学习奠定了基础.学生在初中已经学习过平行四边形的对边、三角形中位线与底边等平行关系,本节课是对平面内直线与直线的平行关系的深化与拓展,也为后续线面平行、面面平行以及各种角的学习打下基础.

教学目标 (1)了解空间两条直线的位置关系;(2)理解并掌握基本事实4与等角定理;(3)提升学生的直观想象、逻辑推理、数学抽象等数学学科核心素养.

教学重点 基本事实4与等角定理.

教学难点 等角定理的证明与应用.

2 教学过程

2.1 创设情境,直观感受

师:前面我们学习了基本立体图形,这些空间图形中蕴含着丰富的点、线、面的位置关系,今天我们一起来研究空间中两条直线的位置关系.

师:初中时我们学习了平面几何.在平面内,两条直线的位置关系有哪些?

生:平行、相交.

师:公共点的个数如何?

生:平行直线没有公共点,相交直线有且只有一个公共点.

问题1 在空间中,两条直线的位置关系又有哪些?

师:我们来看一个生活中的例子(出示图1).



图1

师:从图形中抽象出的这两条直线是平行直线还是相交直线?

生:既不平行也不相交.

师:有没有公共点?

生:没有.

师:是否存在一个平面,使得这两条直线同时在这个平面内?

生:不存在.

师:确实,这两条直线不同在任何一个平面内.像这样的两条直线,咱们教室里有吗?

生:电灯和黑板上沿所在直线.

师:你能用手中的笔摆出这样的两条直线吗?

(请一个学生示范)

师:像这样,不同在任何一个平面内的两条直线称为异面直线.

师:我们把教室抽象为一个长方体(图2),那么长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的12条棱所在直线中,与 AA_1 异面的有哪些?

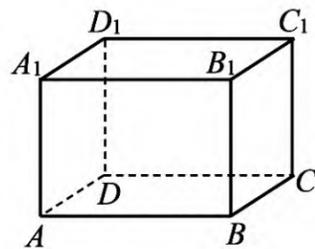


图2

生: BC, B_1C_1, CD, C_1D_1 .

师:可见,空间中两条直

线的位置关系除了平行、相交,还有异面.其中,平行直线和相交直线是共面的,异面直线是不共面的;如果按公共点个数来划分,有且只有一个公共点的两直线相交,没有公共点的两直线平行或异面.

师:我们将在下节课进一步学习异面直线,今天我们将对平行直线进行深入研究.

设计意图 从学生已有的知识和经验出发,经

历由平面推广到空间的过程.创设学生感兴趣的生活情境,抽象出数学问题,帮助学生直观感知异面直线与平行直线、相交直线的不同,体会生活无处不数学.最终过渡到本节课的主线——长方体,为下面的学习作好铺垫.

2.2 循序渐进,螺旋上升

问题2 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的12条棱所在直线中,与 AA_1 平行的有哪些?

生: BB_1, CC_1, DD_1 .

师:为什么 $AA_1 \parallel CC_1$?

生:因为 $AA_1 \parallel BB_1, BB_1 \parallel CC_1$,所以 $AA_1 \parallel CC_1$.

师:在平面内平行是具有传递性的,在空间中这个性质依然成立.

(PPT展示基本事实4:平行于同一条直线的两条直线平行.)

师:你能用符号语言描述这一基本事实吗?

生: $\left. \begin{matrix} a \parallel b \\ b \parallel c \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \parallel c$.

问题3 经过直线外一点,有几条直线和这条直线平行?

生:有且只有一条.

问题4 如图3,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,已知 E, F 分别为 AB, BC 的中点,那么直线 EF 与直线 A_1C_1 平行吗?为什么?

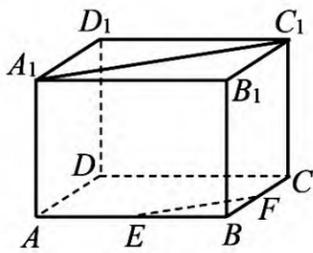


图3

生:平行.连结 AC , 因为 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线,所以 $EF \parallel AC$. 又因为 $AC \parallel A_1C_1$, 根据基本事实4, $EF \parallel A_1C_1$.

师:在立体几何的证明中,每一个结论都应有定义、定理、基本事实的支持,那么 $AC \parallel A_1C_1$ 的依据是什么?

生:因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \parallel BB_1, BB_1 \parallel CC_1$, 所以 $AA_1 \parallel CC_1$, 所以四边形 A_1ACC_1 是平行四边形,所以 $AC \parallel A_1C_1$.

师:很好!(板书此题证明的规范过程)

设计意图 问题2的设置引出基本事实4的同时,也为问题4中 $AC \parallel A_1C_1$ 这一难点的解决埋下了伏笔.问题3和问题4都是基本事实4的应用,平面内常借助三角形中位线和平行四边形对边证明两直线平行,而基本事实4为证明空间中两直线平行提供了理论依据.学生初学立体几何的证明,在教学中一定要指导学生用规范严谨的数学语言进行表述.

问题5 如图4,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,已证 $AC \parallel A_1C_1$, 又 $AB \parallel A_1B_1$, 问: $\angle BAC$ 与 $\angle B_1A_1C_1$ 是否相等?为什么?

生:可以先证明 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 全等.因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = A_1B_1, BC = B_1C_1$, 之前证明过 $AC = A_1C_1$, 所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 全等, 所以 $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

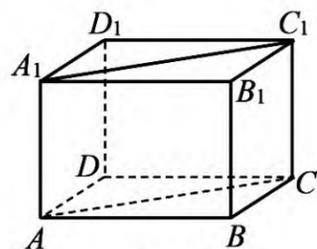


图4

问题6 如图5,在空间中,如果 $\angle BAC$ 和 $\angle B_1A_1C_1$ 的边 $AB \parallel A_1B_1, AC \parallel A_1C_1$, 并且方向相同. 问: $\angle BAC$ 与 $\angle B_1A_1C_1$ 是否相等?为什么?

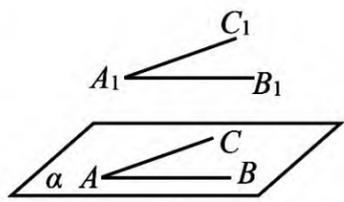


图5

师:这里“方向相同”是指以射线的视角看待角的两边,射线 AB 与 A_1B_1 方向相同,射线 AC 与 A_1C_1 方向也相同.请同学们以小组为单位,探讨一下这个问题.

(学生分组探究,写出证明过程,由一位学生代表展示讲解.)

问题7 在空间中,如果 $\angle BAC$ 和 $\angle B_1A_1C_1$ 的边 $AB \parallel A_1B_1, AC \parallel A_1C_1$, 那么 $\angle BAC$ 与 $\angle B_1A_1C_1$ 之间有何关系?

生:相等或互补.如果两个角的两边方向相同或方向相反,这两个角相等;如果一组对应边方向相同,另一组对应边方向相反,这两个角互补.

师:可见,要想证明空间中两个角相等,除了两组平行关系,“方向相同”这个条件是必不可少的.

(PPT展示定理内容:如果空间中一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同,那么这两个角相等.)

该定理保证了空间的角在平移后大小不变.

设计意图 等角定理的探究与证明是本节课的难点,证明定理的关键是引导学生构造两个全等三角形,将空间问题转化为平面问题.问题5的设置,为等角定理的探究与证明作了铺垫.在学生已有的知识储备基础上,遵循“最近发展区原理”;问题6对一般性结论进行探究,让学生经历从特殊到一般、层层深入的过程,在合作中体会解决问题的乐趣.

2.3 巩固提升,思悟数学

数学运用: 如图6,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,已知 E_1, E 分别为棱 A_1D_1, AD 的中点. 求证: $\angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$.

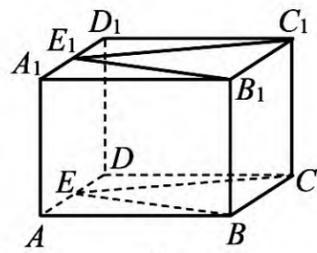


图6

(学生练习)

师:通过本节课的学习,在知识内容、方法能力等方面,你有怎样的收获或体会?

加强课堂交流 提升思维活力

——以一道对数试题的教学为例

於有海 (江苏省江浦高级中学文昌校区 211800)

数学是思维的科学^[1]. 数学课堂, 关键是引导学生思考, 培养学生的思维能力, 要让学生经历数学探究的过程, 积累基本活动经验. 当前, 数学教学的症结在于教师要么只是“讲给学生听”“做给学生看”, 要么“一步一步提示”地牵着学生走, 而没有真正放手“让学生去做”“让学生去说”“让学生去想”. 这样只会导致学生“一听就知道, 一做就不会”, 显然不符合现代教育理念, 也不利于对学生核心素养的培养. 怎样的高中数学课堂教学才能培养学生的数学思维, 才能让课堂充满活力, 才能让数学课堂充满生命力? 本文结合2020年山东省新高考模拟卷中一道试题的课堂教学, 对以上问题做一些研究.

1 教学片断

(学生先在小组内交流, 再由代表发言.)

师: 本节课我们以长方体为载体, 通过直观感受, 了解到空间两条直线有三种位置关系, 并对平行直线进行了深入研究. 基本事实4将两直线平行问题从空间转化为平面, 降三维为二维; 等角定理为我们后续研究各种角提供了理论支持. 在证明中, 我们进一步感受到数学的逻辑性和严谨性, 希望同学们在今后的学习中, 能用严谨求实的科学精神领略更多的数学之美.

设计意图 练习是对基本事实4和等角定理的应用, 教师挑选有代表性的解答进行展示, 可以是严谨规范的, 起到示范作用, 也可以是有典型问题的, 请学生一起修改完善. 课堂小结是课堂教学中的重要一环, 通过课堂小结指导学生找到知识的精华所在, 把相关知识融会贯通, 形成知识网络结构; 引导学生回顾学习探究的历程, 领悟重要的思想方法和学习方法, 总结数学学习的经验; 培养学生反思、概括、表达的能力, 养成良好的数学学习习惯.

3 回顾与反思

3.1 以长方体为载体, 明暗线交织

立体几何是研究三维空间中物体的形状、大小和位置关系的一门数学学科, 学习立体几何对我们认识、理解现实世界, 更好地生存与发展具有重要的意义. 直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算, 是我们探索和认识空间图形及其性质、建立空间观念的主要方法. 长方体作为立体几何中的基本几何体,

1.1 案例呈现

课上教师给出一道题目, 通过学生的分析、探究、解答来复习对数式大小比较问题的基本知识、基本技能和基本思想方法, 为学生解决“幂指对”这一类数学问题提供和积累数学基本活动经验.

例 若 $a > b > c > 1$, 且 $ac < b^2$, 则()

A. $\log_a b > \log_b c > \log_c a$

B. $\log_c b > \log_b a > \log_a c$

C. $\log_b c > \log_a b > \log_c a$

D. $\log_b a > \log_c b > \log_a c$

生1: 我先来“抛砖引玉”(学生笑). 解决这个问题并不难, 只需要取 $a=4, b=3, c=2$ 代入验证, 可知选项B正确.(教师微笑肯定)

是研究线线关系、线面关系、面面关系的重要载体. 本节课借助长方体模型, 以明暗两条线贯穿始终. 明线即知识的自然生成过程: 空间两条直线的位置关系—基本事实4—等角定理; 暗线即直观想象、数学抽象、逻辑推理等数学核心素养的发展. 两条主线共同决定了课堂教学活动的方向和效果.

3.2 用问题推进教学, 螺旋式上升

问题是数学的心脏, 是数学思想的源泉, 是数学思维的动力. 美国著名心理学家布鲁纳指出: “教学过程是一种提出问题和解决问题的持续不断的活动.” 本节课根据学生的“最近发展区”设置了环环相扣、层层递进的7个问题, 利用问题驱动, 吸引学生主动思考, 引导学生用数学的眼光观察现象、发现问题, 使用恰当的数学语言描述问题, 用数学的思想方法解决问题. 在数学问题的发现、分析和解决过程中构建完整的知识体系, 深化理解所学内容, 发展数学思维.

3.3 重视教更重视学, 促素养提升

《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出, 普通高中的培养目标是进一步提升学生综合素质, 着力发展核心素养, 使学生具有理想信念和社会责任感, 具有科学文化素养和终身学习能力, 具有自主发展能力和沟通合作能力. 在数学教学中, 教师要不断探索和创新教学方式, 不仅重视如何教, 更要重视如何学. 引导学生独立思考、动手实践、自主探索、合作交流, 促进学生学会数学, 养成良好的学习习惯, 提升数学学科核心素养.