比较大小方法多，构造函数价更高

◇ 陕西　侯有岐(特级教师)

例　(2021年全国乙卷理12) 设 $a=2\ln 1.01$，$b=\ln 1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$，则(　　).

A. $a<b<c$　　　B. $b<c<a$

C. $b<a<c$　　　D. $c<a<b$

【经典理由】本题是比较大小问题的典型代表，尽管解法多样，但不易估算，值得回味.

【一题多解】比较大小主要考查对函数知识的综合运用能力，是高考常考题型之一.本题条件简洁，平中有新.因为 a,b,c 三个数相差微乎其微，可以说除了构造函数再无其他妙法.通过该题的学习可以很好地掌握解决构造函数比较大小的方法和技巧.

那么如何构造函数呢？

因为 a,b,c 三个数的结构差异很大，无法用同一函数统一起来.但是利用对数的运算和对数函数的单调性或者贝努力不等式不难对 a,b 的大小做出判定，而对于 a 与 c，b 与 c 的大小关系，则需根据其结构特点构造不同的函数来比较.

先用以下两种解法比较 a 与 b 的大小.

解法1　利用对数的运算和对数函数的单调性

根据对数的运算可知 $a=2\ln 1.01=\ln 1.01^2=\ln 1.0201$，又 $b=\ln 1.02$，由对数函数的单调性得 $a>b$.

解法2　利用贝努力不等式 $(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x$ $(\alpha\geqslant 2,x>-1)$

由解法1知，比较 a 与 b 的大小关键在于比较 $(1+0.01)^2$ 与 1.02 的大小，事实上，由贝努力不等式 $(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x(\alpha\geqslant 2,x>-1)$，易得

$$(1+0.01)^2>1+2\times 0.01=1.02.$$

由对数函数的单调性得 $a>b$，这样就排除了A，D.

接下来的关键任务就是判定 a 与 c，b 与 c 的大小.

解法1　构造函数，利用函数单调性比较大小

先比较 b 与 c 的大小.

因为 $b=\ln 1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$，设 $x=0.02$，则 $b=\ln(1+x)$，$c=\sqrt{1+2x}-1$，则

$$b-c=\ln(1+x)-\sqrt{1+2x}+1.$$

于是构造函数

$$g(x)=\ln(1+x)-\sqrt{1+2x}+1(\ x\in(0,1)),$$

则 $g(0)=0$，$g(0.02)=b-c$，且

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+2x}}=\frac{1}{\sqrt{(1+x)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+2x}}<0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $g(0.02)<g(0)=0$，即 $b<c$.

再比较 a 与 c 的大小.

因为 $a=2\ln 1.01$，$c=\sqrt{1.04}-1$，设 $x=0.01$，则

$$a=2\ln(1+x),c=\sqrt{1+4x}-1,$$

$$a-c=2\ln(1+x)-\sqrt{1+4x}+1.$$

于是构造函数

$$f(x)=2\ln(1+x)-\sqrt{1+4x}+1(x\in(0,1)),$$

则 $f(0)=0$，$f(0.01)=a-c$，且

$$f'(x)=\frac{2}{1+x}-\frac{2}{\sqrt{1+4x}}.$$

因为 $(1+x)^2-(1+4x)=x(x-2)<0$ $(x\in(0,1))$，所以 $1+x<\sqrt{1+4x}$，即 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，故 $f(0.01)>f(0)=0$，即 $a>c$.故选B.

解法2　利用对数平均不等式比较大小

对数平均不等式：若 $a>0$，$b>0$，$a\neq b$，则

$$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}.$$

将该不等式齐次化得

$$\sqrt{\frac{a}{b}}<\frac{\frac{a}{b}-1}{\ln\frac{a}{b}}<\frac{\frac{a}{b}+1}{2},\ a\neq b.$$

不妨设 $a>b$，$x=\frac{a}{b}>1$，则 $\sqrt{x}<\frac{x-1}{\ln x}<\frac{x+1}{2}$，即

$$\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\ (x>1).$$

在比较 a 与 c 的大小时，只要在 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$ $(x>1)$ 中令 $x=1.01$，就可得

$$a=2\ln 0.01>2\cdot\frac{2(1.01-1)}{1.01+1}=\frac{4\times 0.01}{1.01+1}>$$

$$\frac{0.04}{\sqrt{1.04}+1}=\frac{0.04(\sqrt{1.04}-1)}{1.04-1}=\sqrt{1.04}-1=c,$$

即 $a>c$.

在比较 b 与 c 的大小时，只要在 $\ln x<\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>1)$ 中令 $x=1.02$，利用放缩法可得

$$b=\ln 1.02<\sqrt{1.02}-\frac{1}{\sqrt{1.02}}<\sqrt{1.04}-1=c,$$

即 $b<c$.

综上，$a>c>b$，故选 B.

【一题多思】回顾本题的解法，我们有如下的思考.

1)对于高考中比较大小的问题，常见的方法有以下三种：临界值法、单调性法、构造函数法.

2)对于比较大小中较复杂的问题，一般都可以通过构造函数，利用函数的单调性进行解决，在此导数是通法.

3)在本例中，上述比较 a 与 b 的大小，或 a 与 c，b 与 c 大小的解法 1 和解法 2 的本质是一样的，都是构造函数，利用函数的单调性比较，只是每一个的解法 1 具有一般性，而解法 2 具有特殊性，特殊在其背后隐藏着重要的背景不等式.

比较 a 与 b 大小的解法 2 实质是贝努力不等式 $(1+x)^{\alpha}\geqslant 1+\alpha x(\alpha\geqslant 2,x>-1)$ 的直接应用.

比较 a 与 c，b 与 c 大小的解法 1 中，函数

$$f(x)=2\ln(1+x)-\sqrt{1+4x}+1(x\in(0,1)),$$

$$g(x)=\ln(1+x)-\sqrt{1+2x}+1(x\in(0,1)),$$

实质上等价于 $\ln(1+x)\leqslant\sqrt{1+2x}-1\leqslant x$ $(x\geqslant 0)$，即为常见不等式 $\ln(1+x)\leqslant x(x\geqslant 0)$ 的加强版.解法 2 的实质是对数平均不等式 $\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$ $(a>0,b>0,a\neq b)$ 的变形应用.

由此可见，以 e 为底数的指数函数、对数函数与根式函数的综合题已经悄悄地走进了高考试题中，大家务必留心常见的不等式及其加强版的处理方法.

4)比较 a 与 c，b 与 c 的大小，构造函数时可以推广到一般情形，用待定系数法确定函数的解析式，最后用函数的单调性解决比较大小问题.如比较 a 与 c 的大小.

因为 $a-c=2\ln 1.01+1-\sqrt{1.04}$，问题转化为比较 $2\ln 1.01+1-\sqrt{1.04}$ 与 0 的大小.不妨设函数为 $f(x)$，使 $f(m)=0$，$f(n)=2\ln 1.01+1-\sqrt{1.04}$.

令 $m=1$，$n=1.01$，则

$$f(1)=0,f(1.01)=2\ln 1.01+1-\sqrt{1.04}.$$

令 $f(x)=2\ln x+1-\sqrt{g(x)}$，则

$$\begin{cases}g(1)=1,\\ g(1.01)=1.04.\end{cases}$$

不妨设 $g(x)=kx+t$，代入可得 $k=4$，$t=-3$，所以 $g(x)=4x-3$，即 $f(x)=2\ln x+1-\sqrt{4x-3}$，则 $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2}{\sqrt{4x-3}}$，由 $f'(x)>0$，得 $1<x<3$，所以 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递增，所以 $f(1.01)>f(1)$，即 $2\ln 1.01+1-\sqrt{1.04}>0$，所以 $2\ln 1.01>\sqrt{1.04}-1$，故 $a>c$.

事实上，比较 a 与 c 大小的解法 1 中函数 $f(x)=2\ln(1+x)-\sqrt{1+4x}+1$ 可以看作当 $m=0$，$n=0.01$ 时，用待定系数法所得.

根据此法，比较 a 与 c 大小，还可以构造函数 $f(x)=2\ln(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4})+1-\sqrt{x}$，此时 $m=1$，$n=1.04$；或 $f(x)=2\ln(\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4})+1-x$，此时 $m=1$，$n=\sqrt{1.04}$；或 $f(x)=2\ln[\frac{1}{4}(1+x)^2+\frac{3}{4}]-x$，此时 $m=0$，$n=\sqrt{1.04}-1$.

比较 b 与 c 的大小，可以仿照比较 a 与 c 大小的方法，用待定系数法确定所构造函数使问题得以解决.由于篇幅所限，具体过程请读者自己练习.

【一题多变】

1.(2020 年全国Ⅰ卷理 12)若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则(　　).

A. $a>2b$　　B. $a<2b$

C. $a>b^2$　　D. $a<b^2$

2.(2020 年全国卷Ⅱ卷理 11、文 12)若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，则(　　).

A. $\ln(y-x+1)>0$

B. $\ln(y-x+1)<0$

C. $\ln|x-y|>0$

D. $\ln|x-y|<0$

3.(2020 年全国Ⅲ卷理 12)已知 $5^5<8^4$，$13^4<8^5$.设 $a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，$c=\log_{13} 8$，则(　　).

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

4.(2020 年天津卷文、理 6)设 $a=3^{0.7}$，$b=(\frac{1}{3})^{-0.8}$，$c=\log_{0.7}0.8$，则 a，b，c 的大小关系为(　　).

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

5.(2020 年全国Ⅲ卷文 10)设 $a=\log_3 2$，$b=\log_5 3$，$c=\frac{2}{3}$，则(　　).

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$

C. $b<c<a$ D. $c<a<b$

【一题多变详解】

1.答案:B

因为 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b=2^{2b}+\log_2 b$，而 $2^{2b}+\log_2 b<2^{2b}+\log_2 b+1=2^{2b}+\log_2 2b$，所以 $2^a+\log_2 a<2^{2b}+\log_2 2b$.令 $f(x)=2^x+\log_2 x$，由指数函数、对数函数的单调性，可知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且 $f(a)<f(2b)$，所以 $a<2b$.故选 B.

2.答案:A

由 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，得 $2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$.令 $f(x)=2^x-3^{-x}$，由指数函数的单调性可知，$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $f(x)<f(y)$，所以 $x<y$，即 $y-x>0$.因为 $y-x+1>1$，所以 $\ln(y-x+1)>\ln 1=0$.故选 A.

3. 答案:A

易知 $a,b,c\in(0,1)$.由

$$\frac{a}{b}=\frac{\log_5 3}{\log_8 5}=\log_5 3\times\log_5 8<$$

$$\frac{(\log_5 3+\log_5 8)^2}{4}=\frac{(\log_5 24)^2}{4}<\frac{2^2}{4}=1,$$

得 $a<b$.因为 $b=\log_8 5$，$c=\log_{13}8$，所以 $8^b=5$，$13^c=8$，即 $8^{5b}=5^5$，$13^{4c}=8^4$.又因为 $5^5<8^4$，$13^4<8^5$，所以 $13^{4c}=8^4>5^5=8^{5b}>13^{4b}$，即 $b<c$.

综上，$a<b<c$.故选 A.

4. 答案:D

因为 $a=3^{0.7}$，$b=(\frac{1}{3})^{-0.8}=3^{0.8}$，所以 $b>a>1$.又因为 $0<c=\log_{0.7}0.8<\log_{0.7}0.7=1$，所以 $b>a>c$.故选 D.

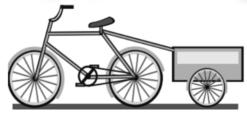
5. 答案:A

因为 $\log_2\sqrt{8}<\log_2 3<\log_2 4$，所以 $\frac{3}{2}<\log_2 3<2$，所以 $\frac{1}{2}<\log_3 2<\frac{2}{3}$，故 $a<c$.又因为 $c=\frac{2}{3}\log_5 5=\log_5\sqrt[3]{25}$，$b=\log_5 3=\log_5\sqrt[3]{27}$，所以 $c<b$.

综上，$a<c<b$.故选 A.

（作者单位：陕西省汉中市四〇五学校）

分段数列的通项与求和



◇ 江苏 陈 敏[1] 张启兆[2]

分段数列是一种特殊的分段函数，已成为近几年高考和各类竞赛中的“新亮点”.在2021年新高考数学Ⅰ卷中就出现了一道关于分段数列的题，本文从分段数列的特点出发，归纳分段数列的考查类型及常用解题策略，希望对读者有所帮助.

1 分段数列的特点

1）通项公式分段，如（苏教版高中数学《必修5》2012年6月第4版第34页）写出数列$\{a_n\}$的前5项，并作出它的图象，$a_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\ 2n-1, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

2）递推关系分段，如2021年新高考Ⅰ卷的第17题.

2 分段数列类型

2.1 由奇偶分类引起的分段

策略1 活用递推，等价转化

例1 （2021年新高考Ⅰ卷17）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & n\text{ 为奇数},\\ a_n+2, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

（1）记 $b_n=a_{2n}$，写出 b_1，b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求$\{a_n\}$的前20项和.

分析 （1）所给条件中的数列是一个分段数列，初看这个数列的定义有点“吓人”，再看所求目标写出 b_1，b_2 的值，挺开心的，因为一方面是送分，另一方面提示求 b_3，从而直观感觉数列$\{b_n\}$是等差数列，再进一步进行理性判断$\{b_n\}$，进而联想到利用定义证明$\{b_n\}$是等差数列.

（2）顺着题意做，不妨设 $b_n=a_{2n}$，当 n 为奇数时 $a_{n+1}=a_n+1$，即 $a_n=a_{n+1}-1$，把$\{a_n\}$的奇数项转化为$\{a_n\}$的偶数项，从而转化为求数列$\{b_n\}$的前10项和的问题.

解 （1）由 $a_1=1$，得 $a_2=a_1+1=2$，$a_3=a_2+2=4$，$a_4=a_3+1=5$，$a_5=a_4+2=7$，$a_6=a_5+1=8$，从而 $b_1=a_2=2$，$b_2=a_4=5$，$b_3=a_6=8$.$b_{n+1}-b_n=a_{2n+2}-a_{2n}=a_{2n+1}+1-a_{2n}=a_{2n}+2+1-a_{2n}=3$，所