八省联考压轴题引起的思考*

戚有建

（江苏省扬州中学　225009）

备受关注的八省联考结束了，但是留给我们的思考并没有结束，试卷的 22 题就有很大的教学价值和研究价值，下面谈谈这道压轴题的各种解法及命题背景.

一、考题展示

题目（2021 年八省联考卷 22 题）已知函数 $f(x)=e^x-\sin x-\cos x$，　$g(x)=e^x+\sin x+\cos x$.

(1)证明：当 $x>-\dfrac{5\pi}{4}$ 时，$f(x)\geq 0$；

(2)若 $g(x)\geq 2+ax$，求实数 a 的值.

点评 本题是 2021 年八省联考卷的 22 题，是压轴题，是选拔题，第(1)问考查函数不等式的证明，第(2)问考查不等式恒成立，考查分类讨论、等价转化、数形结合思想，有一定难度和区分度，本题结构简洁、表达流畅、静中有动、平中见奇、入口较宽，解法多样，背景丰富，令人回味无穷，极具教学价值和研究价值.

二、常规解法

(1)**解析：（分区间逐段研究）**

①当 $x\in\left(-\dfrac{5\pi}{4},-\dfrac{\pi}{4}\right]$，$e^x>0,\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leq 0$，所以 $f\left(x\right)\geq 0$；

②当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$时，$f'\left(x\right)=e^x-\cos x+\sin x=e^x+\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$递增，

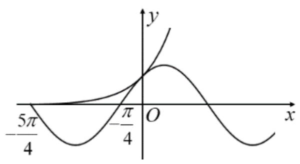
因为 $f'\left(0\right)=0$，所以 $f\left(x\right)$在$\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$上递减，$f\left(x\right)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上递增，

所以 $f\left(x\right)_{\min}=f\left(0\right)=0$，所以 $f\left(x\right)\geq 0$；

③当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},+\infty\right)$时，$e^x>\sqrt{2},\sin x+\cos x\leq\sqrt{2}$，所以 $f\left(x\right)\geq 0$；

综上得，命题得证.

点评 对于本小题，学生容易想到转化为证明 $f(x)_{\min}\geq 0$，但是不容易想到这样分区间，实际上可以从“形”的角度，借助 $y=e^x$ 与 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的图象，这样就好理解了，



当 $x\in\left(-\dfrac{5\pi}{4},-\dfrac{\pi}{4}\right]$时，$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的图象在 x 轴下方，而 $y=e^x$ 的图象在 x 轴上方；当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$时，借助图象容易发现差函数 $f(x)=e^x-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$先减后增；当

$x\in\left[\dfrac{\pi}{4},+\infty\right)$时，借助三角函数$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的有界性即可处理.

(2)解析：（先做必要条件，再验证充分性）

令$h\left(x\right)=g\left(x\right)-ax-2=e^{x}+\sin x+\cos x-ax-2$，则$h'\left(x\right)=e^{x}+\cos x-\sin x-a$，

因为$h\left(0\right)=0\geq h\left(x\right)$，所以$x=0$是函数$h\left(x\right)$的极值点，所以$h'\left(0\right)=0$，即$a=2$，下面验证充分性.

此时，$h\left(x\right)=e^{x}+\sin x+\cos x-2x-2$，$h'\left(x\right)=e^{x}+\cos x-\sin x-2$，$h''\left(x\right)=e^{x}-\sin x-\cos x$

①当$x>-\dfrac{5}{4}\pi$时，由（1）得$h''\left(x\right)=e^{x}-\sin x-\cos x>0$，所以$h'\left(x\right)$递增，又$h'\left(0\right)=0$，

所以$h\left(x\right)$在$\left(-\dfrac{5\pi}{4},0\right)$上递减，在$\left(0,+\infty\right)$上递增，所以$h\left(x\right)_{\min}=h\left(0\right)=0$，所以$h\left(x\right)\geq 0$；

②当$x\leq-\dfrac{5\pi}{4}$时，$-2x\geq\dfrac{5}{2}\pi$，所以$h\left(x\right)=e^{x}+\sin x+\cos x-2x-2\geq 0-\sqrt{2}+\dfrac{5}{2}\pi-2>0$，

综上得，$a=2$.

点评 对于本小题，可以先做必要条件，再验证充分性. 关键是抓住$h\left(0\right)=0\geq h\left(x\right)$，如此则有$x=0$是函数$h\left(x\right)$的极值点，从而$h'\left(0\right)=0$，即$a=2$.

三、简洁解法

(1)**解析：（构建商函数，研究商函数最值）**

等价于证明$\dfrac{\sin x+\cos x}{e^{x}}\leq 1$，令$h(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{e^{x}},(x>-\dfrac{5\pi}{4})$，则$h'(x)=\dfrac{-2\sin x}{\mathrm{e}^{x}}$，

①当$x\in\left[\dfrac{\pi}{4},+\infty\right)$时，$e^{x}>\sqrt{2},0<\sin x+\cos x\leq\sqrt{2}$，所以$h(x)\leq 1$；

②当$x\in\left(-\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$时，令$h'(x)=\dfrac{-2\sin x}{\mathrm{e}^{x}}=0$，则$x=-\pi$或$0$，

所以$h(x)$在$\left(-\dfrac{5\pi}{4},-\pi\right)$上递减，在$\left(-\pi,0\right)$上递增，在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上递减，

所以可求得$h(x)_{\max}=h(0)=1$，所以$h(x)\leq 1$；

综上得，命题得证.

点评 此处为什么商函数$h(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{e^{x}}$的导数$h'(x)=\dfrac{-2\sin x}{\mathrm{e}^{x}}$会如此简单呢？实际上是因为$(e^{x})'=e^{x}$，所以$h'(x)$的分子分母可以约分，所以$h'(x)$分子的结构就简单一些（仅含有三角函数，不含有指数函数）.

(2)**解析：（构建商函数，研究商函数最值）**

令$h\left(x\right)=g\left(x\right)-ax-2=e^{x}+\sin x+\cos x-ax-2$，则$h'\left(x\right)=e^{x}+\cos x-\sin x-a$，

因为$h\left(0\right)=0\geq h\left(x\right)$，所以$x=0$是函数$h\left(x\right)$的极值点，所以$h'\left(0\right)=0$，即$a=2$，下面验证充分性.

此时即证$e^x+\sin x+\cos x-2x-2\geq 0$， 等价于证明$\dfrac{\sin x+\cos x-2x-2}{e^x}+1\geq 0$，

令$h(x)=\dfrac{\sin x+\cos x-2x-2}{e^x}+1$，则$h'(x)=\dfrac{2(x-\sin x)}{\mathrm{e}^x}$，

令$\varphi(x)=x-\sin x$，则$\varphi'(x)=1-\cos x\geq 0$，所以$\varphi(x)$递增，又$\varphi(0)=0$，所以

当$x\in(-\infty,0)$时，$h'(x)<0$，所以$h(x)$递减；当$x\in(0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，所以$h(x)$递增，

所以$h(x)_{\min}=h(0)=0$，所以$h(x)\geq 0$，命题得证.

点评 同样，此处为什么商函数$h(x)=\dfrac{\sin x+\cos x-2x-2}{e^x}+1$的导数$h'(x)=\dfrac{2(x-\sin x)}{\mathrm{e}^x}$会比预想的简单呢？实际上是因为$(e^x)'=e^x$，所以$h'(x)$的分子分母可以约分，所以$h'(x)$分子的结构就简单一些（分子上不含有指数函数）.

四、命题背景

命题者是如何想到函数不等式$e^x+\sin x+\cos x\geq 2+ax$的呢？研究后发现与泰勒公式有关.

（1）$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$

（1）$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$

（3）$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots$

将上面三个式子相加得：$e^x+\sin x+\cos x=2+2x+\dfrac{2x^4}{4!}+\dfrac{2x^5}{5!}+\cdots$，比较系数可得$a=2$，原来如此，高屋建瓴！

点评 泰勒公式是高等数学中的一个重要公式，它将各种类型的函数（指数函数、对数函数、三角函数）和多项式函数联系了起来，这样在局部可以用多项式函数近似替代其它的复杂函数. 笔者做了一些研究，发现最近几年的很多高考压轴题都与泰勒公式有关.

五、背景应用

例 1（2015 年北京卷理科 18 题改编）已知函数$f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

（1）求曲线$y=f(x)$在点$(0，f(0))$处的切线方程；

（2）若不等式$f(x)>k\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$对$x\in(0，1)$恒成立，求实数$k$的最大值.

答案（1） $y=2x$ （2）2

点评 由泰勒展开式得：当 $x\in(-1,1)$ 时，$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$，用 $-x$ 替换 x 得 $\ln(1-x)=(-x)-\frac{x^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n}+\cdots$，两式相减得 $\ln\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots)$，所以当 $x\in(0,1)$ 时可得 $\ln\frac{1+x}{1-x}\geq 2(x+\frac{x^3}{3})$，然后隐掉 $x+\frac{x^3}{3}$ 前面的系数 2，改成求参数 a 的取值范围.

例 2（2019 年全国卷 I 文科 21 题）已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

（1）证明：$f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点；

（2）若 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\geq ax$，求实数 a 的取值范围.

点评 本题的命制过程如下：由泰勒公式得 $2\sin x=2x-\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$，$x\cos x=x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}+\cdots$，两式相减得 $2\sin x-x\cos x=$ $x+(\frac{2}{3!}-\frac{1}{2!})\frac{x^3}{6}+(\frac{2}{5!}-\frac{1}{4!})x^5+(\frac{2}{7!}-\frac{1}{6!})x^7+\cdots+[\frac{2}{(2n-1)!}-\frac{1}{(2n-2)!}]x^{2n-1}+\cdots$，所以当 $x\in[0,\pi]$ 时，有 $2\sin x-x\cos x\geq x$，然后隐掉 x 前面的系数即可.

***项目基金：**本文是江苏省十三期教研课题《指向数学思维的高中“自治自动”教学研究》(编号：2019JK13-L319）的阶段性研究成果

摘要：本文研究 2021 年八省联考 22 题的各种解法及命题背景.

关键词：八省联考、压轴题、商函数、泰勒公式