

已知 $F$ 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 若点 $P(x_0, 4)$ 在抛物线 $C$ 上, 且 $PF = \frac{5}{2}p$ .

(1)求抛物线 $C$ 的方程;

(2)若动直线 $l: x = my + 1 (m \in \mathbf{R})$ 与抛物线 $C$ 相交于 $A, B$ 两点, 问:在 $x$ 轴上是否存在定点 $D(t, 0)$ (其中 $t \neq 0$ ), 使得向量 $\frac{\overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DA}|} + \frac{\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DB}|}$ 与向量 $\overrightarrow{OD}$ 共线(其中 $O$ 为坐标原点)?若存在, 求出点 $D$ 的坐标; 若不存在, 请说明理由.