江苏省仪征中学 2020-2021 学年第二学期

高二数学周练（3）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1. 已知 i 是虚数单位，复数 $z=\frac{1-i}{|i|}$，下列说法正确的是(　)

A. z 的虚部为$-i$　　　　B. z 对应的点在第一象限
C. z 的实部为-1　　　　D. z 的共轭复数为 $1+i$

2. 设函数在 $x=1$ 处存在导数，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=$(　)

A. $f'(1)$　　B. $3f'(1)$　　C. $\frac{1}{3}f'(1)$　　D. $f'(3)$

3. 已知 i 为虚数单位，且复数 z 满足 $z(1+2i)=i^{2020}+i$，则下面关于复数 z 的三个命题：

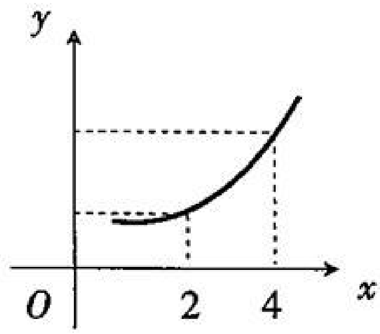
①复数 z 的虚部为$-\frac{1}{5}$i；②$|z|=3$；③复数 z 的共轭复数$\bar{z}$对应的点在第一象限．

其中正确命题的个数为 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

4. 已知函数 $y=f(x)$的图象如图所示，$f'(x)$是函数 $f(x)$的导函数，则下列数值排序正确的是(　)

A. $2f'(2)<f(4)-f(2)<2f'(4)$　　B. $2f'(4)<2f(2)<f(4)-f(2)$
C. $2f'(2)<2f'(4)<f(4)-f(2)$　　D. $f(4)-f(2)<2f'(4)<2f'(2)$



5. 若函数 $f(x)=ke^x-\frac{1}{2}x^2$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，则实数 k 的取值范围是(　)

A. $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

6. 已知 $a=\frac{1}{e},b=\frac{\ln3}{3},c=\frac{\ln4}{4}$，则 a,b,c 的大小关系为(　)

A. $b<c<a$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

7. 在四面体 $ABCD$ 中，已知棱 AC 的长为$\sqrt{2}$，其余各棱长都为 1，则二面角 $A-CD-B$ 的平面角的余弦值为(　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

8. 已知函数 $f(x)=-x^3+ax^2-4$ 在 $x=2$ 处取得极值，若 m，$n\in[-1,1]$，则 $f(m)+f'(n)$的最小值是(　)

A. 15　　B. -15　　C. 10　　D. -13

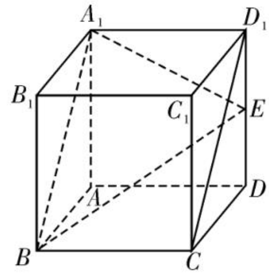
二、多项选择题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. 材料：函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型，在现行的高等数学与数学分析教材中，对“初等函数”给出了确切的定义，即由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合步骤所构成的，且能用一个式子表示的，如函数 $f(x)=x^x(x>0)$，我们可以作变形：$f(x)=x^x=\mathrm{e}^{\ln x^x}=\mathrm{e}^{x\ln x}=\mathrm{e}^t(t=x\ln x)$，所以 $f(x)$可看作是由函数 $f(t)=e^t$和 $g(x)=x\ln x$ 复合而成的，即 $f(x)=x^x(x>0)$为初等函数．

根据以上材料，对于初等函数 $h(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$的说法正确的是(　)

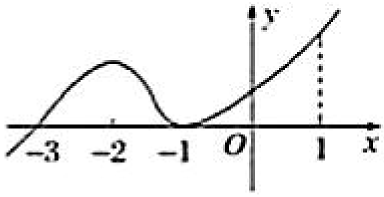
A. 无极小值 B. 有极小值 1　　C. 无极大值　　D. 有极大值$e^{\frac{1}{e}}$

10. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E 是棱 DD_1的中点，F 在侧面 CDD_1C_1上运动，且满足$B_1F//$ 平面A_1BE.以下命题正确的有(　)



A. 侧面 CDD_1C_1上存在点 F，使得$B_1F\perp CD_1$
B. 直线B_1F 与直线 BC 所成角可能为30°
C. 平面A_1BE 与平面 CDD_1C_1所成锐二面角的正切值为 $2\sqrt{2}$
D. 设正方体棱长为 1，则过点 E，F，A 的平面截正方体所得的截面面积最大为$\frac{\sqrt{5}}{2}$

11. 函数$y=f(x)$的导函数$y=f'(x)$的图象如图所示，以下命题错误的是(　)



A. -3 是函数 $y=f(x)$的极值点；
B. -1 是函数 $y=f(x)$的最小值点；
C. $y=f(x)$在区间$(-3,1)$上单调递增；
D. $y=f(x)$在 $x=0$ 处切线的斜率小于零.

12. 设 i 为虚数单位，复数 $z_0=\frac{5}{1-2i}$ 在复平面内对应的点为 M，z_0的共轭复数为$\overline{z}_0$，复数 z 满足$|z-1|=|z_0|$，则(　)

A. 点 M 在第一象限　　B. ${\overline{z}_0}^2=5-4i$
C. $z_0\overline{z}_0=5$　　D. 复数 z 在复平面内所对应的点在一条直线上运动

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 已知 i 是虚数单位，则复数$\frac{5+i}{3+2i}$的虚部为_______.

14. 已知函数 $f(x)=x^3-3x$，若过点 $M(3,t)$可作曲线 $y=f(x)$的三条切线，则实数 t 的取值范围是_________

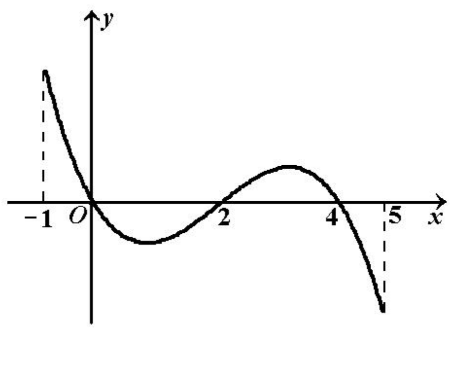
15. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形，其中 $AD=1,AB=2$，侧棱 $PA\perp$底面 $ABCD$，且直线 PB 与 CD 所成角的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球表面积为___________.

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[-1,5]$，部分对应值如下表，$f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示.下列关于 $f(x)$ 的命题：其中正确命题的序号是_________________________.

x	-1	0	4	5
$f(x)$	1	2	2	1

①函数 $f(x)$ 的极大值点为0，4；②函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上是减函数；

③如果当$x\in[-1,t]$时，$f(x)$的最大值是 2，那么 t 的最大值为 4；



④当$1<a<2$时，函数 $y=f(x)-a$ 有 4 个零点；

⑤函数 $y=f(x)-a$ 的零点个数可能为 0，1，2，3，4 个.

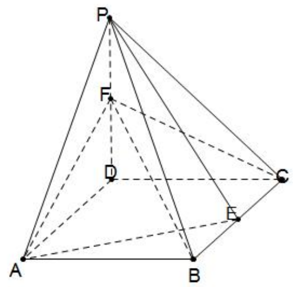
四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

17. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$的极值点；

(2)若 $f(x)\le 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

18. 如图所示在四棱锥 $P-ABCD$ 中 $PD\perp AD$，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$，点 F 为棱 PD 的中点.



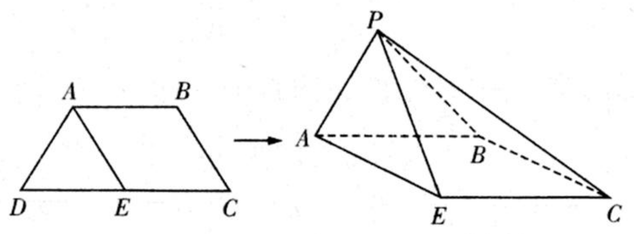
(1)若 E 是 BC 的中点，证明：$CF//$平面 PAE；

(2)若 $BF\perp AC$，三棱锥 $P-BAF$ 的体积为$\sqrt{2}$，求直线 AF 与平面 BCF 所成的角的正弦值.

19. (1)求$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}$的值；

(2)若关于 x 的一元二次方程$x^2+mx+n=0$ 的一个根是 $1+\sqrt{2}i$，其中 m，$n\in\mathrm{R}$，i 是虚数单位，求 $m-n$ 的值.

20. 如图，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AD=AB=BC=1$，$CD=2$，E 为 CD 中点，以 AE 为折痕把 ADE 折起，使点 D 到达点 P 的位置($P\notin$平面 $ABCE$).



(1)证明：$AE\perp PB$；

(2)若直线 PB 与平面 $ABCE$ 所成的角为$\frac{\pi}{4}$，求二面角 $A-PE-C$ 的余弦值.

21. 已知函数 $f(x)=e^{x}(x^{2}+ax+1)$.
(Ⅰ)当 $a\in R$ 时，讨论 $f(x)$的单调性；
(Ⅱ)若实数 a 满足 $a\leq-1$，且函数 $g(x)=4x^{3}+3(b+4)x^{2}+6(b+2)x(b\in R)$的极小值点与$f(x)$的极小值点相同，求证：$g(x)$的极小值小于等于 0.

22. 已知函数 $f(x)=ax^{2}-x+\ln x(a>0)$.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与直线 $x+2y=0$ 垂直，求 a 的值及函数 $g(x)=f(x)-2\ln x$ 的单调区间；

(Ⅱ)若 $f(x)$的极大值和极小值分别为 m,n，证明：$m+n<2\ln 2-3$.

答案和解析

1.【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查复数的概念、几何意义、模、共轭复数和运算，属于基础题.

先化简 z，再逐一判断即可.

【解答】

解：$\because z=\frac{1-i}{|i|}=1-i$，

$\therefore z$ 的实部为 1，虚部为-1；

z 对应的点的坐标为$(1,-1)$，在第四象限;

z 的共轭复数为 $1+i$.

故 ABC 错误，D 正确

故选 D.

2.【答案】C

【解析】

【分析】

此题考查极限及其导数的概念、几何意义，解题的关键是熟练掌握导数的定义及极限的运算性质，先运用性质变形再由导数的定义得出结果，将极限的运算性质变形得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$，再由导数的几何意义得正确答案.

【解答】

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{1}{3}f'(1)$.

故选 C.

3.【答案】A

【解析】

【分析】

本题主要考查复数的概念以与几何意义、共轭复数，以及复数的四则运算与复数的模，属于基础题．

先由复数的四则运算化简复数，再逐项判断即可．

【解答】

解：由 $z(1+2i)=i^{2020}+i$，可得 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{5}=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$，

则复数 z 的虚部为$-\frac{1}{5}$，故①错误；

$|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，故②错误；

$\overline{z}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$，所对应的点$\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$在第一象限，故③正确，

所以正确命题的个数为 1，

故选 A．

4.【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查导数的几何意义，函数的单调性，属于基础题．

$f'(2)$，$f'(4)$分别代表在 $x=2$，$x=4$ 处的切线的斜率，$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}$可以看成割线的斜率，可得结果．

【解答】

解：由函数 $f(x)$的图像可知：当 $x\geq 2$ 时，$f(x)$单调递增，

$\therefore f'(2)>0$，$f'(4)>0$，$f(4)-f(2)>0$，

而$f'(2)$，$f'(4)$分别代表在 $x=2$，$x=4$ 处的切线的斜率，$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}$可以看成割线的斜率，

从而有$0<f'(2)<\dfrac{f(4)-f(2)}{2}<f'(4)$．

即 $2f'(2)<f(4)-f(2)<2f'(4)$．

故选 A．

5.【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查了函数的单调性与导数的关系，属于中档题．

因为 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，所以当 $x>0$ 时，$f\ '(x)=ke^x-x\geqslant 0$ 恒成立，即 $k\geqslant\frac{x}{e^x}$在$(0,+$

$\infty)$上恒成立.令 $g(x)=\frac{x}{e^x}(x>0)$，求得 $g(x)$在$(0,+\infty)$的最大值即可得答案.

【解答】

解：$\because f(x)=ke^x-\frac{1}{2}x^2$，

$\therefore f'(x)=ke^x-x$.

$\because$函数 $f(x)=ke^x-\frac{1}{2}x^2$在$(0,+\infty)$上单调递增，

$\therefore f'(x)=ke^x-x\geqslant 0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，

即 $k\geq\frac{x}{e^x}$在$(0,+\infty)$上恒成立.

令 $g(x)=\frac{x}{e^x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}(x>0)$，

$\therefore$当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增，

当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减.

$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}$,

$\therefore k\geq\frac{1}{e}$.

故选 C.

6.【答案】B

【解析】

【分析】

本题主要考查了利用导数判定函数的单调性、比较大小，属于基础题.

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,$x\geqslant e$,则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\leqslant 0$ 恒成立，所以函数 $f(x)$在$[e,+\infty)$上单调递减，进而即可求解.

【解答】

解：设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,$x\geqslant e$,则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\leqslant 0$ 恒成立，

$\therefore$函数 $f(x)$在$[e,+\infty)$上单调递减，$\therefore f(e)>f(3)>f(4)$,即$\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}>\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 4}{4}$,

$\therefore a>b>c$，故选 B.

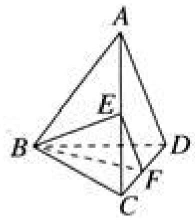
7.【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查二面角的余弦值问题，关键是找到二面角的平面角，属于基础题．

【解答】

如图，取 AC 的中点 E，CD 的中点 F，连接 EF，BF，BE．



$\because AC=\sqrt{2}$，其余各棱长都为 1，

$\therefore AD\perp CD$，$\therefore EF\perp CD$．

又$\because BF\perp CD$，

$\therefore \angle BFE$ 是二面角 $A-CD-B$ 的平面角．

$\because EF=\frac{1}{2}$，$BE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$BF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore EF2+BE2=BF2$．

$\therefore \angle BEF=90°$，$\therefore \cos\angle BFE=\frac{EF}{BF}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

故选 C．

8.【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查的是利用导数研究函数的单调性、极值和最值，二次函数的最值，属于中档题．

由题意函数 $f(x)$在 $x=2$ 处取得极值，即可得出 a 的值，然后求出 $f(m)$和 $f'(n)$的最小值即可．

【解答】

解：$f'(x)=-3x^2+2ax$，

由函数 $f(x)$在 $x=2$ 处取得极值知 $f'(2)=0$，

即$-3\times4+2a\times2=0$，$\therefore a=3$，

由此可得 $f(x)=-x^3+3x^2-4$，$f'(x)=-3x^2+6x$，

令 $f'(x)=-3x^2+6x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=2$，

所以 $f(x)$在区间$[-1,0)$上单调递减，在区间$[0,1]$上单调递增，

所以当 $m\in[-1,1]$时，$f(m)_{min}=f(0)=-4$.

又 $f'(x)=-3x^2+6x$ 的图象开口向下，且对称轴为直线 $x=1$，

所以当 $n\in[-1,1]$时，$f'(n)_{min}=f'(-1)=-9$.

故 $f(m)+f'(n)$的最小值为-13.

故选 D.

9.【答案】AD

【解析】

【分析】

本题考查利用导数研究函数的单调性和极值，属于基础题.

由题意知$h(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}(x>0)$，求导判断其单调性，即可得到极值情况.

【解答】

解：根据材料知：$h(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\ln x\cdot\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}(x>0)$，

所以$h'(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot(\frac{1}{x}\ln x)'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}\ln x}(1-\ln x)$，

令 $h'(x)=0$ 得$x=e$，

当 $0<x<e$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$单调递增；

当 $x>e$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$单调递减.

所以 $h(x)$有极大值且为$h(e)=e^{\frac{1}{e}}$，无极小值.

故选 AD.

10.【答案】AC

【解析】

【分析】

本题主要考查线面角，二面角，截面面积的求解，空间几何中的轨迹问题，意在考查学生的直观想象能力和数学运算能力，综合性较强，属于中档题．取C_1D_1中点 M，CC_1中点 N，连接B_1M,B_1N,MN，易证得平面 $B_1MN//$平面A_1BE，可得点 F 的运动轨迹为线段 MN.取 MN 的中点 F，根据等腰三角形

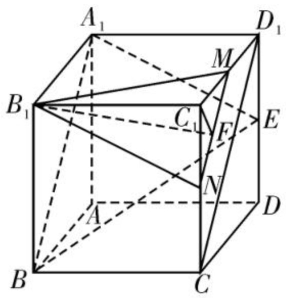
的性质得$B_1F\perp MN$，即有$B_1F\perp CD_1$，A 正确；当点 F 与点 M 或点 N 重合时，直线B_1F 与直线 BC 所成角最大，可判断 B 错误；根据平面 B_1MN // 平面A_1BE，$\angle B_1FC_1$即为平面B_1MN 与平面 CDD_1C_1所成的锐二面角，计算可知 C 正确；

【解答】

解:取C_1D_1中点 M,CC_1中点 N,连接B_1M,B_1N,MN,则易证得$B_1N//A_1E$,$MN//A_1B$,从而平面 B_1MN // 平面A_1BE，所以点 F 的运动轨迹为线段 MN.

取 MN 的中点 F，因为$\triangle B_1MN$ 是等腰三角形，所以$B_1F\perp MN$，

又因为 $MN//CD_1$，所以$B_1F\perp CD_1$，故 A 正确；



设正方体的棱长为 a,当点 F 与点 M 或点 N 重合时,直线B_1F 与直线 BC 所成角最大,此时 $\tan\angle C_1B_1F=\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan30^{\circ}$，所以 B 错误；

平面 B_1MN // 平面A_1BE，取 F 为 MN 的中点，则 $MN\perp C_1F$，$MN\perp B_1F$，$\therefore\angle B_1FC_1$即为平面B_1MN 与平面 CDD_1C_1所成的锐二面角，$\tan\angle B_1FC_1=\frac{B_1C_1}{C_1F}=2\sqrt{2}$，所以 C 正确；

因为当 F 为C_1E 与 MN 的交点时，截面为菱形 AGC_1E(G 为 BB_1的中点)，面积为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 D 错误.

故选：AC.

11.【答案】BD

【解析】

【分析】

本题考查利用导数研究函数的性质，考查推理能力，属于中档题.

利用 $f'(x)$的图象，结合函数的单调性、极值点、最值点、导数的几何意义逐个判断即可.

【解答】

解：由 $f'(x)$的图象可知，

$x\in(-\infty,-3)$时，$f'(x)<0$;$x\in(-3,+\infty)$时，$f'(x)>0$;

所以 $f(x)$在$(-\infty,-3)$递减，在$(-3,+\infty)$递增，故 C 正确；

-3 是函数 $y=f(x)$的极小值点，故 A 正确；

又 $f'(0)>0$，故 $y=f(x)$在 $x=0$ 处切线的斜率大于 0，故 D 错误；

-1 不是函数 $y=f(x)$的最小值点，故 B 错误，

故选 BD.

12.【答案】AC

【解析】

【分析】

本题主要考查复数的运算，共轭复数，考查复数的几何意义及模的运算，属于基础题.

根据复数四则运算化简，$z_0=1+2i$，判断 A 选项的正确性.根据互为共轭复数的概念及运算，判断 B，C 选项的正确性.设出 z，利用$|z-1|=|z_0|$，结合复数模的运算进行化简，由此判断出 Z 点的轨迹，可判断 D 选项的正确性.

【解答】

解：由条件得$z_0=\frac{5}{1-2i}=1+2i$，所以点 M 在第一象限，故 A 正确；

因为$\overline{z_0}^2=(1-2i)^2=-3-4i$，所以 B 错误；

因为$z_0\overline{z}_0=(1+2i)(1-2i)=5$，所以 C 正确；

由$|z-1|=|z_0|$，得$|z-1|=\sqrt{5}$，设复数 z 在复平面内所对应的点为 $N(x,y)$，

则$(x-1)^2+y^2=5$，可知点 N 在圆上运动，所以 D 错误.

故选 AC.

13.【答案】$-\frac{7}{13}$

【解析】

【分析】

本题考查复数的乘除运算及复数的基本概念，熟练掌握复数的运算法则是解题的关键，属于基础题.

【解答】

解：$\frac{5+i}{3+2i}=\frac{(5+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{17-7i}{13}=\frac{17}{13}-\frac{7}{13}i$，

故其虚部为$-\frac{7}{13}$.

故答案为$-\frac{7}{13}$.

14.【答案】$-9<t<18$

【解析】

【分析】

本题考查了利用导数研究函数的切线方程，考查了导数的几何意义及直线的斜率公式，属于中档题.

假设过点 $M(3,t)$ 的切线斜率为 k，设切点坐标为 $\left(x_0,x_0^3-3x_0\right)$，则有 $k=3x_0^2-3=\frac{x_0^3-3x_0-t}{x_0-3}$，可得 $2x_0^3-9x_0^2+9+t=0$ 有三条切线，即 $2x_0^3-9x_0^2+9+t=0$ 有三个不等的实数根，则极大值大于 0，极小值小于 0，即可得出结果.

【解答】

解：$f(x)=x^3-3x$ 的导函数为 $f'(x)=3x^2-3$，

设切点坐标为 $\left(x_0,x_0^3-3x_0\right)$，过 $M(3,t)$的切线斜率为 k，

则有 $k=3x_0^2-3=\frac{x_0^3-3x_0-t}{x_0-3}$，可得 $2x_0^3-9x_0^2+9+t=0$ 有三条切线，

即 $2x_0^3-9x_0^2+9+t=0$ 有三个不等的实数根，

令 $g(x)=2x^3-9x^2+9+t$，则该函数恰好有三个零点，

$g'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$，

令 $g'(x)>0\Rightarrow x<0或x>3$，令 $g'(x)<0\Rightarrow 0<x<3$，

所以 $g(x)$在 $(0,3)$上单调递减，在 $(-\infty,0)$，$(3,+\infty)$上单调递增，

$g(x)_{极大值}=g(0)=9+t$，$g(x)_{极小值}=g(3)=-18+t$.

当 $x\to-\infty$时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$，

所以有 $\begin{cases}9+t>0\\-18+t<0\end{cases}$，解得 $-9<t<18$.

故答案为$-9<t<18$.

15.【答案】6π

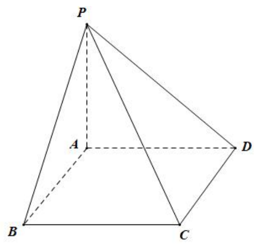
【解析】

【分析】

本题考查球的表面积.根据棱锥的结构特征，属于一般题目，将四棱锥补成长方体，确定球心位置，求得球的半径即可得球的表面积.

【解答】

解：

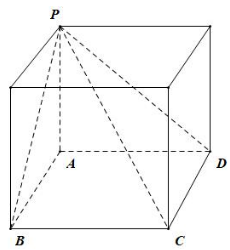


如图，因为$AB//CD$，故$\angle PBA$或其补角为异面直线PB与CD所成的角，

因为$PA\perp$平面$ABCD$，$AB\subset$平面$ABCD$，故$PA\perp AB$，

故$\angle PBA$为锐角，故$\cos\angle PBA=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故$PB=\frac{2}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\sqrt{5}$，故$PA=1$.

将该四棱锥补成如图所示的长方体：



则该长方体的外接球即为四棱锥的外接球，其直径为$\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$，

故表面积为$4\pi R^2=\pi(2R)^2=6\pi$.

故答案为：6π.

16.【答案】①②⑤

【解析】

【分析】

本题考查导数知识的运用，考查导函数与原函数图象之间的关系，正确运用导函数图象是关键

由导数图象可知，函数的单调性，从而可得函数的极值，又极小值$f(2)$未知，然后逐项判断即可；

【解答】

解：由导数图象可知，当$-1<x<0$或$2<x<4$时，$f'(x)>0$，函数单调递增，当$0<x<2$或$4<x<5$，$f'(x)<0$，函数单调递减，当$x=0$和$x=4$，函数取得极大值$f(0)=2$，$f(4)=2$，当$x=2$时，函数取得极小值$f(2)$，

所以①正确；②正确；

因为在当$x=0$和$x=4$，函数取得极大值$f(0)=2$，$f(4)=2$，要使当$x\in[-1,t]$函数$f(x)$的最大值是4，当$2\le t\le 5$，所以t的最大值为5，所以③不正确；

由$f(x)=a$知，因为极小值$f(2)$未知，所以无法判断函数$y=f(x)-a$有几个零点，所以④不正确，

根据函数的单调性和极值，因为极小值$f(2)$未知，函数$y=f(x)$和$y=a$的交点个数有0，1，2，3，4等不同情形，，所以⑤正确，

综上正确的命题序号为①②⑤.

故答案为：①②⑤.

17.【答案】解：(1)当$a=1$时，$f(x)=\ln x-x^2$，定义域是$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-2x=\frac{1-2x^2}{x}$，

$f'(x)>0$时，解得：$0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$，函数在区间$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$单调递增，

$f'(x)<0$，解得：$x>\frac{\sqrt{2}}{2}$，函数在区间$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$单调递减，

所以函数在$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取得极大值，极大值点是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，无极小值点；

(2)若$f(x)\le 0$恒成立，等价于$\ln x-ax^2\le 0$，即$a\ge\frac{\ln x}{x^2}$恒成立，即$a\ge\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)_{\max}$

设$g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，$g'(x)=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，当$g'(x)=0$时，$x=\sqrt{e}$，

当$x\in(0,\sqrt{e})$时，$g'(x)>0$，函数单调递增，

当$x\in(\sqrt{e},+\infty)$时，$g'(x)<0$，函数单调递减，

所以当$x=\sqrt{e}$时函数取得最大值$g(x)_{\max}=\frac{1}{2e}$，　即$a\ge\frac{1}{2e}$.

【解析】本题考查利用导数研究函数的单调性与极值，以及不等式恒成立，属于中档题.

(1)将 $a=1$ 代入，求出 $f'(x)$的单调性，确定函数的极值即可；

(2)分离参数 a，构造新函数 $g(x)$，求出函数 $g(x)$的最大值，得出 a 的取值范围即可.

18.【答案】解：(1)证明：取 PA 的中点 Q，连结 EQ、FQ，

由题意，$FQ//AD$ 且 $FQ=\frac{1}{2}AD$，$CE//AD$ 且 $CE=\frac{1}{2}AD$，

故 $CE//FQ$ 且 $CE=FQ$，

所以四边形 $CEQF$ 为平行四边形，

所以 $CF//EQ$，又 $CF\not\subset$平面 PAE，$EQ\subset$平面 PAE，

所以 $CF//$平面 PAE；

(2) $\because$底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，所以 $BD\perp AC$，

$\because BF\perp AC$，$BF\cap BD=B$，BF，$BD\subset$面 BDF

故 $AC\perp$面 BDF，因为 $PD\subset$面 BDF

则 $PD\perp AC$，又 $PD\perp AD$，$AD\cap AC=A$，AD，$AC\subset$面 $ABCD$，

所以 $PD\perp$面 $ABCD$，

取 AB 中点 M，以 D 为坐标原点，以 DM，DC，DP 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

设 $FD=a$，则$V_{P-BAF}=V_{D-BAF}=V_{F-BAD}$，即$\frac{1}{3}S_{\Delta BAD}\times a=\sqrt{2}$，即 $a=\sqrt{6}$，

又 $D(0,0,0)$，$F(0,0,\sqrt{6})$，$C(0,2,0)$，$B(\sqrt{3},1,0)$，$A(\sqrt{3},-1,0)$.

可得$\overrightarrow{FC}=\left(0,2,-\sqrt{6}\right)$，$\overrightarrow{CB}=\left(\sqrt{3},-1,0\right)$，

设平面 FBC 的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$.

由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{FC}=2y-\sqrt{6}z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=\sqrt{3}x-y=0\end{cases}$，

取平面 FBC 的一个法向量为$\vec{m}=\left(1,\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$；

设直线 AF 与平面 BCF 所成的角为θ，$\overrightarrow{FA}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{6})$，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\vec{m},\overrightarrow{FA}>\right|=\frac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{FA}|}{|\vec{m}||\overrightarrow{FA}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

即直线 AF 与平面 BCF 所成的角的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【解析】本题主要考查线面平行的判断，考查直线与平面所成角，是中档题．

(1)证明：取 PA 的中点 Q，连结 EQ、FQ，得到四边形 $CEQF$ 为平行四边形，所以 $CF//EQ$，$CF//$平面 PAE 得以证明．

(2)证出 $PD\perp$面 $ABCD$，取 AB 中点 M，以 D 为坐标原点，以 DM，DC，DP 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，设 $FD=a$，由三棱锥的体积得 $a=\sqrt{6}$，求得平面 FBC 的一个法向量为$\overrightarrow{m}=\left(1,\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$，设直线 AF 与平面 BCF 所成的角为θ，则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{FA}>|$．

19.【答案】解：(1)$(\frac{1+i}{1-i})^6+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}$

$$=[\frac{(1+i)^2}{2}]^6+\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)}{(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)}=i^6+\frac{5i}{5}=-1+i$$

(2)由题得$\left(1+\sqrt{2}i\right)^2+m\left(1+\sqrt{2}i\right)+n=-1+m+n+2\sqrt{2}i+m\sqrt{2}i=0$，

因为 $m,n\in R$，

所以$\begin{cases}-1+m+n=0\\2\sqrt{2}+m\sqrt{2}=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=-2\\n=3\end{cases}$，

$m-n=-5$．

【解析】本题考查复数相等的充要条件，虚数单位 i 的幂运算的周期性，复数的四则运算，复数范围内方程的根与分解因式，考查运算化简的能力，属于中档题．

(1)根据虚数单位 i 的幂运算的周期性，复数的四则运算化简可得；

(2)将 $1+\sqrt{2}i$ 代入方程，利用复数的四则运算，复数相等的充要条件，解得 m，n 可得结论．

20.【答案】(1)证明：在等腰梯形 $ABCD$ 中，连接 BD，交 AE 于点 O，

$\because AB||CE$，$AB=CE$，$\therefore$四边形 $ABCE$ 为平行四边形，$\therefore AE=BC=AD=DE$，

$\therefore\triangle ADE$ 为等边三角形，$\therefore$在等腰梯形 $ABCD$ 中，$\angle C=\angle ADE=\frac{\pi}{3}$，$\angle DAB=\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore$在等腰ΔADB 中，$\angle ADB=\angle ABD=\frac{\pi}{6}$

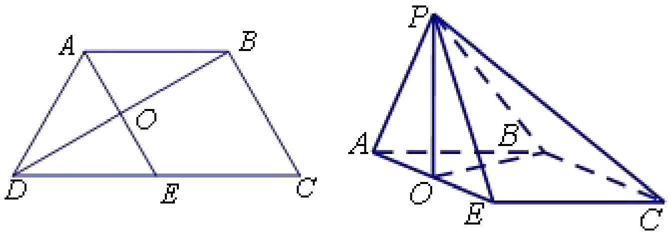
$\therefore\angle DBC=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $BD\perp BC$，

$\therefore BD \perp AE$，

翻折后可得：$OP \perp AE$，$OB \perp AE$，

又$\because OP \subset$平面 POB，$OB \subset$平面 POB，$OP \cap OB = O$，$\therefore AE \perp$平面 POB，

$\because PB \subset$平面 POB，$\therefore AE \perp PB$；



(2)解：在平面 POB 内作 $PQ \perp OB$，垂足为 Q，

因为 $AE \perp$平面 POB，$\therefore AE \perp PQ$，

因为 $OB \subset$平面 $ABCE$，$AE \subset$平面 $ABCE$，$AE \cap OB = O$

$\therefore PQ \perp$平面 $ABCE$，$\therefore$直线 PB 与平面 $ABCE$ 夹角为$\angle PBQ = \frac{\pi}{4}$,

又因为 $OP = OB$，$\therefore OP \perp OB$，

$\therefore O$、Q 两点重合，即 $OP \perp$平面 $ABCE$，

以 O 为原点，OE 为 x 轴，OB 为 y 轴，OP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，由题意得，各点坐标为

$P(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}),E(\frac{1}{2},0,0),C(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, $\therefore \overrightarrow{PE} = (\frac{1}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{EC} = (\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，

设平面 PCE 的一个法向量为$\overrightarrow{n_1} = (x,y,z)$，

则$\begin{cases} \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0 \\ \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \end{cases}$

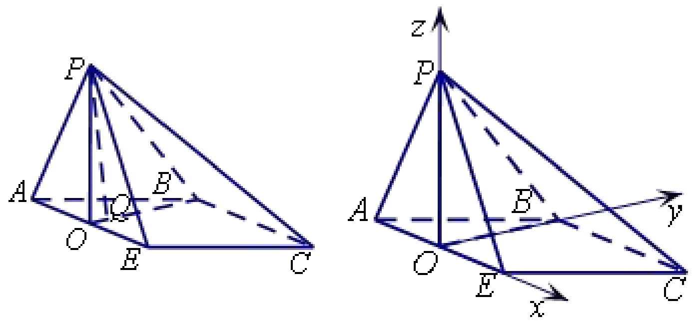
设 $x = \sqrt{3}$，则 $y =- 1$，$z = 1$，

$\therefore \overrightarrow{n_1} = (\sqrt{3}, - 1,1)$，

由题意得平面 PAE 的一个法向量$\overrightarrow{n_2} = (0,1,0)$，

设二面角 $A - EP - C$ 为α，$|\cos\alpha| = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

易知二面角 $A-EP-C$ 为钝角，所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.



【解析】本题主要考查空间几何元素位置关系的证明，考查二面角的求法，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平和空间想象转化分析推理能力.

(1)首先利用平面几何知识以及立体几何翻折问题可得 $OP\perp AE$，$OB\perp AE$，即证明 $AE\perp$ 平面 POB，再证明 $AE\perp PB$；

(2)在平面 POB 内作 $PQ\perp OB$，垂足为 Q，证明 $OP\perp$平面 $ABCE$，以 O 为原点，OE 为 x 轴，OB 为 y 轴，OP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，利用向量法求二面角 $A-PE-C$ 的余弦值.

21.【答案】解：(Ⅰ)$f'(x)=e^x[x^2+(a+2)x+a+1]$

$$f'(x)=e^x(x+1)(x+a+1)$$

由 $f'(x)=0$，得 $x=-1$，或 $x=-a-1$

(1)当 $a=0$ 时，$f'(x)=e^x(x+1)^2\geq 0$，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为增函数，

(2)当 $a>0$ 时，$f'(x)>0$ 解得 $x\in(-\infty,-a-1)$或 $x\in(-1,+\infty)$，$f'(x)<0$ 解得 $x\in(-a-1,-1)$，

故当 $a>0$ 时 $f(x)$在$(-\infty,-a-1)$、$(-1,+\infty)$上为增函数，$f(x)$在$(-a-1,-1)$上为减函数；

(3)当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$ 解得 $x\in(-\infty,-1)$或 $x\in(-a-1,+\infty)$，$f'(x)<0$ 解得 $x\in(-1,-a-1)$，

故当 $a<0$ 时 $f(x)$在$(-\infty,-1)$、$(-a-1,+\infty)$上为增函数，$f(x)$在$(-1,-a-1)$上为减函数；

(Ⅱ)$\because a\leq-1$，$\therefore -a-1>-1$，

又 $f'(x)=e^x[x^2+(a+2)x+a+1]=e^x(x+a+1)(x+1)$，

$\therefore f(x)$的极小值是 $x=-a-1$，从而 $g(x)$的极小值点也是 $x=-a-1$

又 $g'(x)=12(x+1)(x+\frac{b+2}{2})$

$\therefore-\frac{b+2}{2}=-a-1$，即 $b=2a$，

因为 $a\leq-1$，

故 $g(x)$的极小值 $g(-a-1)=-(1+a)^2(4-2a)\leq 0$，

即 $g(x)$的极小值小于等于 0.

【解析】本题综合考察了导数的运用解决单调性，极值等问题，分类讨论等思想的运用，属于中档题.

(I)求解 $f'(x)=e^x[x^2+(a+2)x+a+1]$，即 $f'(x)=e^x(x+1)(x+a+1)$，由 $f'(x)=0$，得 $x=-1$，或 $x=-a-1$，对 a 的范围进行分类讨论，利用导数研究函数的单调性即可.

(II)利用极值的求解得出 $f(x)$的极小值是 $x=-a-1$，从而 $g(x)$的极小值点也是 $x=-a-1$，根据函数关系得出$-\frac{b+2}{2}=-a-1$，即 $b=2a$，因为 $a\leq-1$，故 $g(x)$的极小值 $g(-a-1)=-(1+a)^2(4-2a)\leq 0$，即 $g(x)$的极小值小于等于 0.

22.【答案】(Ⅰ)解：$\because f'(x)=\frac{1}{x}+2ax-1$，

$\therefore f'(1)=2a$，

$\because$函数 $f(x)$在$(1,f(1))$处的切线与直线 $x+2y=0$ 垂直，

$\therefore 2a=2$，

解得 $a=1$，

$g(x)=x^2-x-\ln x\Rightarrow g'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}(x>0)$，

$g(x)$在$(0,1)$递减，在$(1,+\infty)$递增;

(Ⅱ)证明：由 $f(x)=lnx+ax^2-x(x>0)$，得 $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax-1=\frac{2ax^2-x+1}{x}$,

依题意，得方程 $2ax^2-x+1=0$ 有两个不等的正根，故 $a\neq 0$，

设两个不等的正根分别为x_1，x_2，

那么$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{1}{2a}>0\\ x_1x_2=\frac{1}{2a}>0\\ \Delta=1-8a>0\end{cases}$，解得 $0<a<\frac{1}{8}$,

令 $t=\frac{1}{2a}$，则 $t>4$，

$\therefore m+n=f(x_1)+f(x_2)=lnx_1+ax_1^2-x_1+lnx_2+ax_2^2-x_2$

$$=lnx_1x_2+a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-(x_1+x_2)=lnt+\frac{1}{2t}(t^2-2t)-t=lnt-\frac{1}{2}t-1$$

令 $g(t)=lnt-\frac{1}{2}t-1$，$t>4$，

$\therefore g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}=\frac{2-t}{2t}<0$ 恒成立，

$\therefore g(t)$在$(4,+\infty)$上单调递减，

$\therefore g(t)<g(4)=2ln2-3$，

$\therefore m+n<2ln2-3$．

【解析】本题考查了函数的单调性问题以及导数的几何意义，考查转化思想，属难题．

(Ⅰ)求出函数的导数，根据导数的几何意义即可求出 a 的值及函数 $g(x)=f(x)-2\ln x$ 的单调区间；

(Ⅱ)求出 $m+n$ 的解析式，$g(t)=lnt-\frac{1}{2}t-1$，$t>4$，再根据函数的单调性求出 $g(t)<g(4)=2ln2-3$，即可证明．