2020-2021 学年度高三第一学期期初数学试卷

2020. 8. 30

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．命题“$\forall x\in\left(0,+\infty\right)$，$e^x>\ln x$”的否定是（　　）

A．$\forall x\in\left(0,+\infty\right)$，$e^x\le\ln x$　　B．$\exists x\in\left(0,+\infty\right)$，$e^x>\ln x$

C．$\exists x\in\left(0,+\infty\right)$，$e^x\le\ln x$　　D．$\exists x\in\left(0,+\infty\right)$，$e^x<\ln x$

【答案】C

【详解】

命题“$\forall x\in\left(0,+\infty\right)$，$e^x>\ln x$”的否定是$\exists x\in\left(0,+\infty\right)$，$e^x\le\ln x$.

2．设复数$z_1=1+i$，$z_2=x^2-i(x\in R)$，若$z_1\cdot z_2$为实数，则$x=$（　　）

A．1　　B．-1　　C．1 或-1　　D．2

【答案】C

【详解】

解:$\because z_1=1+i,z_2=x^2-i(x\in R)$,

$\therefore z_1\cdot z_2=(1+i)(x^2-i)=(x^2+1)+(x^2-1)i$,

由$z_1\cdot z_2$为实数,则$x^2-1=0$,即$x=\pm1$

3．某次活动要从甲、乙、丙、丁、戊、己六个人中选出四人承担迎宾任务，则在甲、乙被选中的条件下，丙也被选中的概率是(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

【答案】B

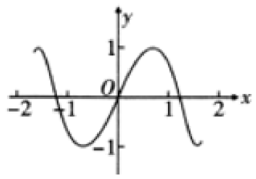
解：设事件A表示“甲乙被选中”，事件B表示“丙被选中”，

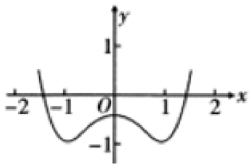
$P(A)=\frac{C_4^2}{C_6^4}=\frac{2}{5}$，$P(AB)=\frac{C_3^1}{C_6^4}=\frac{1}{5}$,

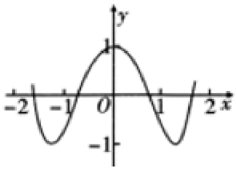
∴则在甲、乙被选中的条件下，丙也被选中的概率：$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2}$.

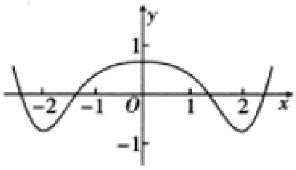
故选：B.

4．函数 $f(x)=\sin(e^{x}+e^{-x})$ 的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【详解】

$0<f(0)=\sin2<1$，且 $f(-x)=f(x)$，函数为偶函数

5．某车间分批生产某种产品，每批产品的生产准备费用为 800 元。若每批生产 x 件，则平均仓储时间为$\frac{x}{8}$天，且每件产品每天的仓储费用为 1 元。为使平均到每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小，每批应生产产品(　　)

A.60 件　　　　B.80 件　　　　C.100 件　　　　D.120 件

【答案】B

【详解】设每批生产产品 x 件，则每件产品的生产准备费用是$\frac{800}{x}$元，仓储费用是$\frac{x}{8}$元，总的费用是$\left(\frac{800}{x}+\frac{x}{8}\right)$元，由基本不等式得$\frac{800}{x}+\frac{x}{8}\geq2\sqrt{\frac{800}{x}\times\frac{x}{8}}=20$，当且仅当$\frac{800}{x}=\frac{x}{8}$，即 $x=80$ 时取等号.

6. 已知函数$f(x)=(m+2)x^{m^2+2m-2}$是幂函数，设$a=\log_5 4, b=\log_{\frac{1}{5}}3, c=0.5^{-0.2}$，则$f(a), f(b), f(c)$的大小关系是(　)

A. $f(c)<f(a)<(b)$　　　　B. $f(b)<f(c)<f(a)$

C. $f(c)<f(b)<f(a)$　　　　D. $f(a)<f(b)<f(c)$

【答案】B

【解答】

解：由于$f(x)$为幂函数，所以$m+2=1$，$m=-1$，

所以$f(x)=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$.由于$b=\log_{\frac{1}{5}}3<\log_{\frac{1}{5}}1=0$，所以$f(b)<0$.

而$a=\log_5 4\in(0,1), c=2^{0.2}>1$，而$f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数，所以$0<f(c)<f(a)$.

故$f(b)<f(c)<f(a)$.

故选 B.

7．已知定义在R上的函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，且$f(x+1)$是偶函数，则关于m的不等式$f(m+2)\geq f(3)$的解集是（　　）

A.$[-3,1]$　　　　B. $(-\infty，1]$

C. $[-5,1]$　　　　D.$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

【答案】A

解析　由于 $f(x+1)$是偶函数，所以 $f(-x+1)=f(x+1)$，

因此函数 $y=f(x)$的图象关于 $x=1$ 对称.

由 $f(x)$在$[1，+\infty)$上递减，知 $f(x)$在$(-\infty，1]$上递增.

又$f(m+2)\geq f(3)$，则$-1\leq m+2\leq 3$，解得$-3\leq m\leq 1$

由以上知，实数 m 的取值范围是$[-3，1]$.

8．设定义在R上的函数$y=f(x)$满足任意$t\in R$都有$f(t+2)=\dfrac{1}{f(t)}$，且$x\in(0,4]$时，$f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}$，则$6f(2017)$，$3f(2018)$，$2f(2019)$的大小关系是（　　）

A．$6f(2017)<3f(2018)<2f(2019)$　　B．$3f(2018)<6f(2017)<2f(2019)$

C．$2f(2019)<3f(2018)<6f(2017)$　　D．$2f(2019)<6f(2017)<3f(2018)$

【答案】A

【详解】

函数 f（x）满足 f（t+2）$=\dfrac{1}{f(t)}$，可得 f（t+4）$=\dfrac{1}{f(t+2)}$=f（t），∴f（x）是周期为 4 的函数.

6f（2017）=6f（1），3f（2018）=3f（2），2f（2019）=2f（3）.

令 g（x）$=\dfrac{f(x)}{x}$，x∈（0，4]，则 g′（x）$=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，

∵x∈（0，4]时，$f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}$，

∴g′（x）>0，g（x）在（0，4]递增，

∴f（1）$<\dfrac{f(2)}{2}<\dfrac{f(3)}{3}$，

可得：6f（1）<3f（2）<2f（3），即 6f（2017）<3f（2018）<2f（2019）.

故答案为：A

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.

9．下列判断正确的是（　　）

A．若随机变量ξ服从正态分布$N\left(1,\sigma^2\right)$，$P\left(\xi\le 4\right)=0.79$，则$P\left(\xi\le -2\right)=0.21$；

B．“$\frac{3}{x+1}-1\le 0$”的必要不充分条件是“$x>2$”；

C．6 把椅子排成一排，3 人随机就座，则任何两人不相邻的坐法种数为 24；

D．已知直线$ax+by=2$经过点$\left(1,3\right)$，则2^a+8^b的取值范围是$\left[4,+\infty\right)$

【答案】ACD

【详解】

A 选项，若随机变量ξ服从正态分布$N\left(1,\sigma^2\right)$，$P\left(\xi\le 4\right)=0.79$，根据正态分布曲线的对称性有

$P\left(\xi\ge -2\right)=P\left(\xi\le 4\right)=0.79$，所以$P\left(\xi\le -2\right)=1-P\left(\xi\ge -2\right)=1-0.79=0.21$，A 选项正确；

B 选项，不等式$\frac{3}{x+1}-1\le 0$的解为$x<-1$或$x\ge 2$，应为充分不必要条件，B 不正确；

C 选项，插空法，所以$A_4^3=24$，C 正确；

D 选项，由题意知$a+3b=2$，因为$2^a>0$，$8^b=2^{3b}>0$，所以$2^a+8^b\ge 2\cdot\sqrt{2^a\cdot 2^{3b}}=4$，当且仅当

$a=1,b=\frac{1}{3}$时取等号，故 D 正确.

故选：ACD

10．已知$a>1$，$0<c<b<1$，下列不等式成立的是（　　）

A．$a^b>a^c$　　B．$\frac{c}{b}>\frac{c+a}{b+a}$　　C．$\log_b a<\log_c a$　　D．$\frac{b}{b+a}>\frac{c}{c+a}$

【答案】ACD

【详解】

由$a>1$，$0<c<b<1$，可得$a^b>a^c$，故A正确；

由$a>1$，$0<c<b<1$，$\frac{c}{b}-\frac{c+a}{b+a}$可得$=\frac{cb+ca-bc-ba}{b\left(b+a\right)}=\frac{a\left(c-b\right)}{b\left(b+a\right)}<0$，$\frac{c}{b}<\frac{c+a}{b+a}$，故$B$错误；

由$a>1$，$0<c<b<1$，$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$，$\log_c a=\frac{1}{\log_a c}$，则$\log_a c<\log_a b<0$，则$\frac{1}{\log_a b}<\frac{1}{\log_a c}<0$，

可得$\log_b a<\log_c a$，故C正确；

由 $a>1$，$0<c<b<1$，$\frac{b}{b+a}-\frac{c}{c+a}=\frac{bc+ba-cb-ca}{(b+a)(c+a)}=\frac{a(b-c)}{(b+a)(c+a)}>0$ 可得 $\frac{b}{b+a}>\frac{c}{c+a}$，故 D 正确.

故选: ACD

11．已知定义域为 R 的奇函数 $f(x)$，满足 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{2x-3},x>2\\ x^2-2x+2,0<x\le 2\end{cases}$，下列叙述正确的是（　　）

A．存在实数 k，使关于 x 的方程 $f(x)=kx$ 有 7 个不相等的实数根

B．当 $-1<x_1<x_2<1$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$

C．若当 $x\in(0,a]$ 时，$f(x)$ 的最小值为 1，则 $a\in\left[1,\frac{5}{2}\right]$

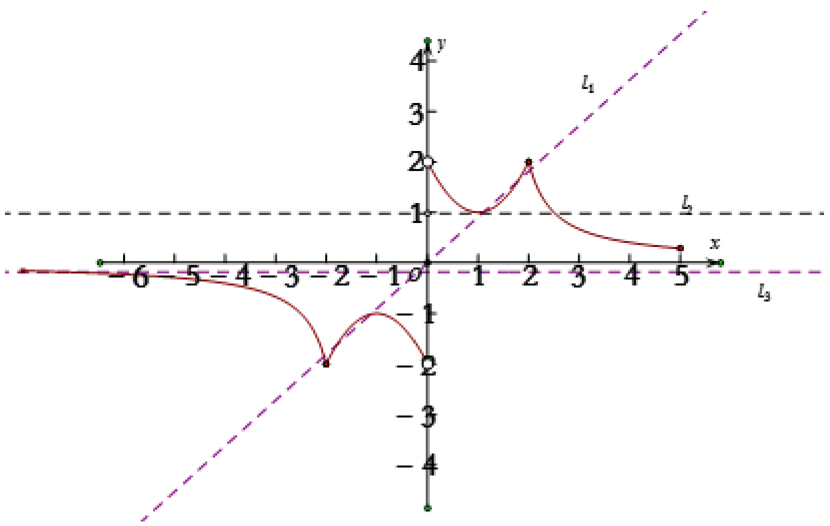
D．若关于 x 的方程 $f(x)=\frac{3}{2}$ 和 $f(x)=m$ 的所有实数根之和为零，则 $m=-\frac{3}{2}$

【答案】AC

【详解】

因为该函数是奇函数，故 $f(x)$ 在 R 上的解析式为：$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{2x+3},(x<-2)\\ -x^2-2x-2,(-2\le x<0)\\ 0,(x=1)\\ x^2-2x+2,(0<x\le 2)\\ \frac{2}{2x-3},(x>2)\end{cases}$

绘制该函数的图像如下所示：



对 A：如图所示直线 l_1 与该函数有 7 个交点，故 A 正确；

对 B：当 $-1<x_1<x_2<1$ 时，函数不是减函数，故 B 错误；

对 C：如图直线 $l_2: y=1$，与函数图交于 $(1,1),\left(\frac{5}{2},1\right)$，

故当 $f(x)$ 的最小值为 1 时，$a\in\left[1,\frac{5}{2}\right]$，故 C 正确；

对 D：$f(x)=\frac{3}{2}$ 时，若使得其与 $f(x)=m$ 的所有零点之和为 0，

则 $m=-\frac{3}{2}$，或 $m=-\frac{3}{17}$，如图直线 l_3，故 D 错误.

故选：AC.

12．在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 在棱 CC_1 上，则下列结论正确的是（　　）

A．直线 BM 与平面 ADD_1A_1 平行

B．平面 BMD_1 截正方体所得的截面为三角形

C．异面直线 AD_1 与 A_1C_1 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$

D．$|MB|+|MD_1|$ 的最小值为 $\sqrt{5}$

【答案】 ACD

【解析】

【分析】

根据线面平行，异面直线夹角，截面图形，线段最值的计算依次判断每个选项得到答案.

【详解】

如图所示：易知平面 BCC_1B_1 // 平面 ADD_1A_1，$BM\subset$ 平面 BCC_1B_1，故直线 BM 与平面 ADD_1A_1 平行，A 正确；

平面 BMD_1 截正方体所得的截面为 BMD_1N 为四边形，故 B 错误；

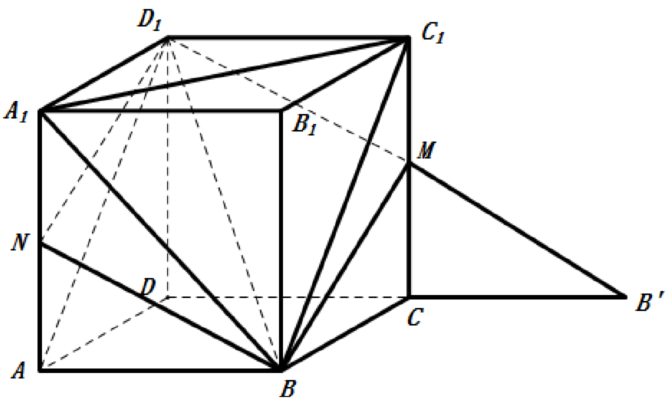
连接 BC_1，A_1B，易知 $AD_1//BC_1$，故异面直线 AD_1 与 A_1C_1 所成的角为 $\angle A_1C_1B$，

$A_1B=A_1C_1=BC_1$，故 $\angle A_1C_1B=\frac{\pi}{3}$，故 C 正确；

延长 DC 到 B' 使 $CB'=1$，易知 $BM=B'M$，故 $|MB|+|MD_1|\geq D_1B'=\sqrt{5}$，

当 M 为 CC_1 中点时等号成立，故 D 正确；

故选： ACD.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．若二项式 $\left(1-3x\right)^n$ （$n\in\mathbf{N}^*$）的展开式中所有项的系数和为 -32，则该二项式展开式中含有 x^3 项的系数为______________。

【答案】 -270；

【详解】

取 $x=1$，则 $\left(1-3\right)^n=-32$，故 $n=5$；

$T_{r+1}=C_5^r\cdot1^{5-r}\cdot\left(-3x\right)^r=C_5^r\cdot\left(-3\right)^r\cdot x^r$，取 $r=3$ 得到系数为 $C_5^3\cdot\left(-3\right)^3=-270$.

14．已知正实数 x，y 满足 $x+y=1$，则 $\frac{1}{x}-\frac{4y}{y+1}$ 的最小值是______________。

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 解：正实数 x，y 满足 $x+y=1$，

则 $\frac{1}{x}-\frac{4y}{y+1}=\frac{1}{x}-\frac{4y+4-4}{y+1}=\frac{1}{x}+\frac{4}{y+1}-4$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{4}{y+1})[x+(y+1)]-4$

$=\frac{1}{2}(5+\frac{y+1}{x}+\frac{4x}{y+1})-4\geq\frac{1}{2}(5+4)-4=\frac{1}{2}$

当且仅当 $\frac{y+1}{x}=\frac{4x}{y+1}$ 且 $x+y=1$ 即 $y=\frac{1}{3}$，$x=\frac{2}{3}$ 时取得最小值是 $\frac{1}{2}$/

故答案为：$\frac{1}{2}$

15．针对时下的“抖音热”，某校团委对“学生性别和喜欢抖音是否有关”作了一次调查，其中被调查的男女生人数相同，男生喜欢抖音的人数占男生人数的$\frac{4}{5}$，女生喜欢抖音的人数占女生人数$\frac{3}{5}$，若有95%的把握认为是否喜欢抖音和性别有关则调查人数中男生最少有___________人。

附表：

$P\left(K^2\geq k_0\right)$	0.050	0.010
k	3.841	6.635

附：$K^2=\frac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$

【答案】 45

【详解】

设男生的人数为$5n\left(n\in N^*\right)$，根据题意列出2×2列联表如下表所示：

	男生	女生	合计
喜欢抖音	$4n$	$3n$	$7n$
不喜欢抖音	n	$2n$	$3n$
合计	$5n$	$5n$	$10n$

则$K^2=\frac{10n\times\left(4n\times2n-3n\times n\right)^2}{5n\times5n\times7n\times3n}=\frac{10n}{21}$，

由于有95%的把握认为是否喜欢抖音和性别有关，则$3.841\leq K^2<6.635$，

即$3.841\leq\frac{10n}{21}<6.635$，得$8.0661\leq n<13.9335$，

$\because n\in N^*$，则n的可能取值有9、10、11、12，13

因此，调查人数中男生人数的可能值为45或50或55或60，65.

16．已知函数$f(x)=\begin{cases}2-\left|x+2\right|,x\in[-4,0]\\2f(x-4),x\in(0,+\infty)\end{cases}$，则f(6)=________；若方程$f(x)=x+a$在区间$[-4,8]$有三个不等实根，实数a的取值范围为_____________。

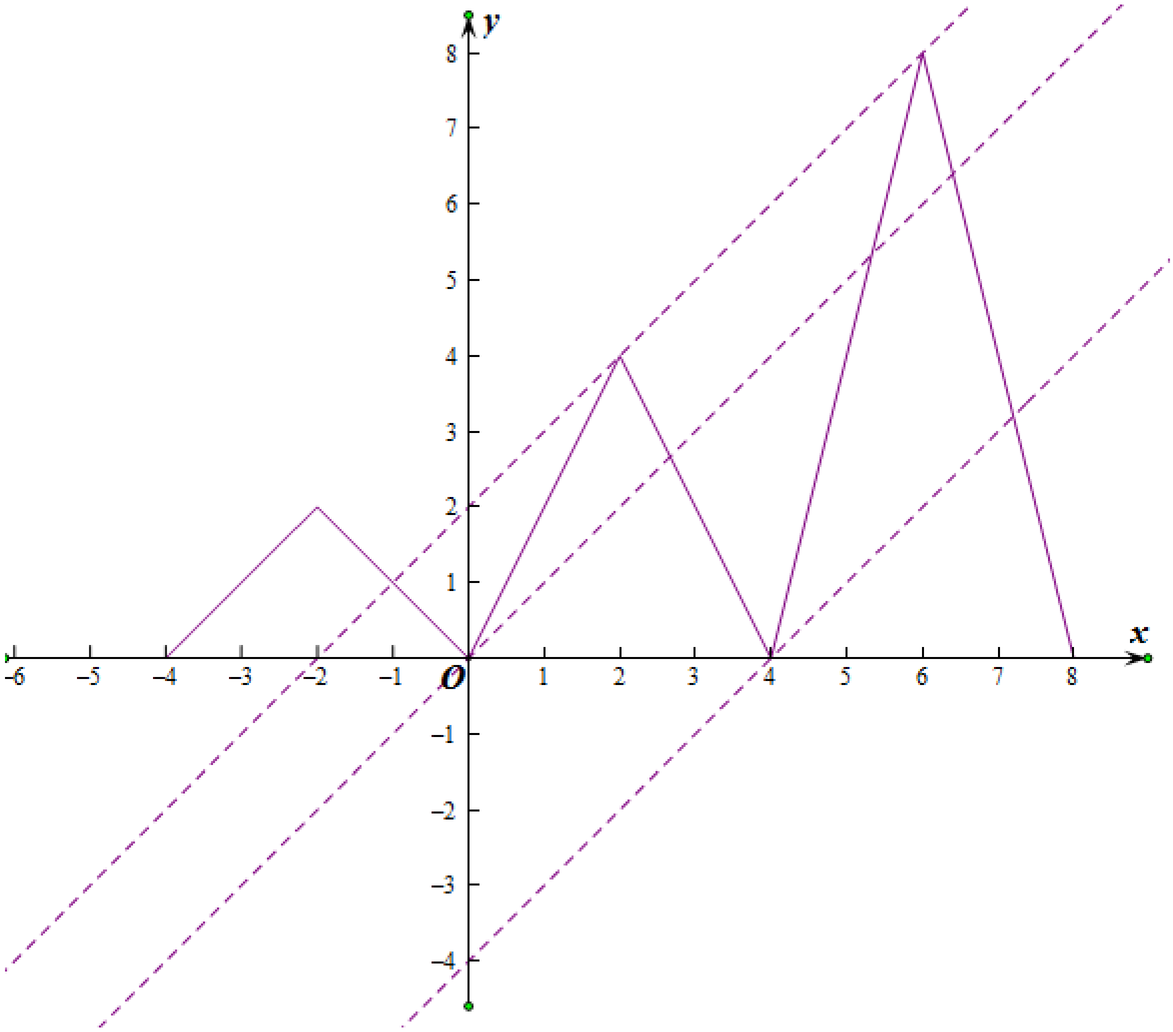
【答案】8　　$\{2\}\cup(-4,0)$

【详解】

解：因为 $f(x)=\begin{cases}2-|x+2|, x\in[-4,0]\\ 2f(x-4), x\in(0,+\infty)\end{cases}$

$\therefore f(6)=2f(2)=2\times 2f(-2)=4\left(2-|-2+2|\right)=8$

作出函数 $f(x)$ 在区间 $[-4,8]$ 上的图象如图：



设直线 $y=x+a$，要使 $f(x)=x+a$ 在区间 $[-4,8]$ 上有 3 个不等实根，

即函数 $y=x+a$ 与 $y=f(x)$ 在区间 $[-4,8]$ 上有 3 个交点，

由图象可知 $-4<a<0$ 或 $a=2$

所以实数 a 的取值范围是 $(-4,0)\cup\{2\}$

故答案为：8；$(-4,0)\cup\{2\}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 已知全集为 R，函数$f(x)=\lg(1-x)$的定义域为集合 A，集合$B=\{x|x(x-1)>6\}$.

(1)求$A\cap(C_RB)$；

(2)若$C=\{x|-1+m<x<2m\}$，$C\subseteq(A\cap(C_RB))$，求实数 m 的取值范围.

【答案】解：(1)由$1-x>0$得，函数$f(x)=\lg(1-x)$的定义域A $=\{x|x<1\}$，$x^2-x-6>0,(x-3)(x+2)>0$，得$B=\{x|x>3或x<-2\}$，

$\therefore C_RB=\{x|-2\le x\le 3\}$，　　$A\cap(C_RB)=[-2,1)$；

(2)$C\subseteq\{x|-2\le x<1\}$，

①当$C=\varnothing$时，满足要求，此时$-1+m\ge 2m$，得$m\le -1$，

②当$C\ne\varnothing$时，要$C\subseteq\{x|-2\le x<1\}$，则$\begin{cases}-1+m<2m\\-1+m\ge -2,\\2m\le 1\end{cases}$

解得$-1<m\le\frac{1}{2}$.　　由①②得，$m\le\frac{1}{2}$.

18. 化简：

(1)$(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$　$(a>0,b>0)$

(2)$(\log_3 2+\log_9 2)\cdot(\log_4 3+\log_8 3)$.

(3)$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}+(0.008)^{-\frac{1}{3}}+lg4+2lg5+2^{1+log_2 3}$.

【答案】解：(1)$(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})=[2\times(-6)\div(-3)]a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=4a$；

(2)$(\log_3 2+\log_9 2)\cdot(\log_4 3+\log_8 3)=(\frac{lg2}{lg3}+\frac{lg2}{lg9})\cdot(\frac{lg3}{lg4}+\frac{lg3}{lg8})$

$=(\frac{lg2}{lg3}+\frac{lg2}{2lg3})\cdot(\frac{lg3}{2lg2}+\frac{lg3}{3lg2})=(\frac{3}{2}\cdot\frac{lg2}{lg3})\cdot(\frac{5}{6}\cdot\frac{lg3}{lg2})=\frac{5}{4}$.

(3)原式$=\pi-3+(0.2)^{-3\times\frac{1}{3}}+2(lg2+lg5)+2^{log_2 6}$

$=\pi-3+5+2+6=\pi+10$.

19. 在$\triangle ABC$中（图 1），$AB=5$，$AC=7$，D为线段AC上的点，且$BD=CD=4$.以BD为折线，把$\triangle BDC$翻折，得到如图 2 所示的图形，M为BC的中点，且$AM\perp BC$，连接AC.

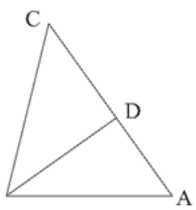


图 1

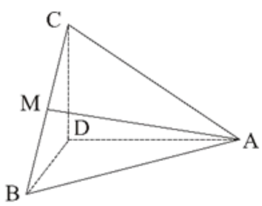


图 2

（1）求证：$AB\perp CD$；

（2）求二面角 $B-AC-D$ 的余弦值.

【答案】（1）证明见解析 （2）$\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$

【详解】

（1）证明：在图 1 中有：$AC=7$，$BD=CD=4$，所以 $AD=3$

$\therefore$ 在 ΔABD 中，$AB=5$，$AD=3$，$BD=4$

$\therefore AD^2+BD^2=AB^2$，所以 $BD\perp CD$

在图 2 中有：在 ΔABC 中，$AM\perp BC$，M 为 BC 的中点

$\therefore AB=AC=5$，在 ΔABD 中，$AC=5$，$CD=4$，$AD=3$

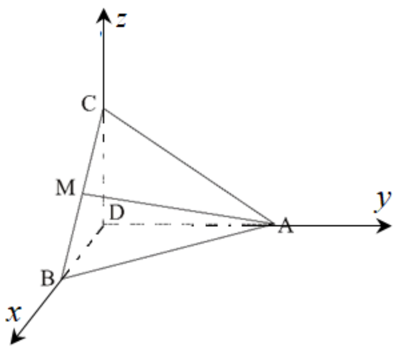
$\therefore AC^2=CD^2+AD^2$，所以 $CD\perp AD$ 翻折后仍有 $BD\perp CD$

又 AD、$BD\subset$ 平面 ABD，$AD\cap BD=D$，$\therefore CD\perp$ 平面 ABD

$\because AB\subset$ 平面 ABD，所以 $CD\perp AB$

（2）解：由（1）可知 CD、BD、AD 两两互相垂直.

以 D 为原点，BD、AD、CD 所在的直线分别为 x、y、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,3,0)$，$B(4,0,0)$，$C(0,0,4)$

$\therefore \overrightarrow{AB}=(4,-3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,-3,4)$

设平面 ABC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}4x-3y=0\\-3y+4z=0\end{cases}$，令 $x=3$，则 $y=4$，$z=3$，$\therefore \vec{m}=(3,4,3)$

$\because$ 平面 ACD 的法向量为 $\vec{n}=(1,0,0)$ $\therefore \cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$

$\therefore$ 二面角 $B-AC-D$ 的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$

20. 已知函数 $f(x)=\log_4(4^x+1)+kx(k\in R)$ 是偶函数.

(1)求 k 的值;

(2)设 $g(x)=\log_4\left(a\cdot 2^x-\frac{4}{3}a\right)$，若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有且只有一个公共点，求实数 a 的取值范围.

【答案】解：(1) ∵函数$f(x)=\log_4(4^x+1)+kx(k\in R)$是偶函数，
$\therefore f(-x)=\log_4(4^{-x}+1)-kx=f(x)=\log_4(4^x+1)+kx$恒成立，
即$\log_4(4^x+1)-x-kx=\log_4(4^x+1)+kx$恒成立，

即$2kx=-x$对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以$k=-\frac{1}{2}$;

(2)由(1)知$f(x)=\log_4(4^x+1)-\frac{1}{2}x$，
∵函数$f(x)$与$g(x)$的图象有且只有一个交点，
∴方程$\log_4(4^x+1)-\frac{x}{2}=\log_4\left(a\cdot 2^x-\frac{4}{3}a\right)$有且只有一个实根，化成$2^{2x}+1=2^x\left(a\cdot 2^x-\frac{4}{3}a\right)$，

令$t=2^x>0$，则方程$(a-1)t^2-\frac{4}{3}at-1=0$有且只有一个正根，

当$a=1$时，$t=-\frac{3}{4}$，不合题意；

当$a\neq 1$时，
当两根相等时，$\Delta=\left(-\frac{4}{3}a\right)^2-4(a-1)(-1)=0\Rightarrow a=\frac{3}{4}$或$-3$，

若$a=\frac{3}{4}$，则$t=-2$，不合题意，若$a=-3$，则$t=\frac{1}{2}$;

当一个正根与一个负根时，$\frac{-1}{a-1}<0\Rightarrow a>1$.

综上所述，实数 a 的取值范围为$\{-3\}\cup(1,+\infty)$.

21.　追求人类与生存环境的和谐发展是中国特色社会主义生态文明的价值取向.为了改善空气质量，某城市环保局随机抽取了一年内 100 天的空气质量指数（AQI）的检测数据，结果统计如表：

AQI	$[0,50]$	$(50,100]$	$(100,150]$	$(150,200]$	$(200,250]$	$(250,300]$
空气质量	优	良	轻度污染	中度污染	重度污染	重度污染
天数	6	14	18	27	25	10

（1）从空气质量指数属于[0，50]，(50，100]的天数中任取 3 天，求这 3 天中空气质量至少有 2 天为优的概率；

（2）已知某企业每天因空气质量造成的经济损失 y（单位：元）与空气质量指数 x 的关系式为

$y=\begin{cases}0,9\le x\le 100\\220,100<x\le 250\\1480,250<x\le 300\end{cases}$，假设该企业所在地 7 月与 8 月每天空气质量为优、良、轻度污染、中度污染、重度污染、严重污染的概率分别为$\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{6}$． 9 月每天的空气质量对应的概率以表中 100 天的空气质量的频率代替.

（*i*）记该企业 9 月每天因空气质量造成的经济损失为 *X* 元，求 *X* 的分布列；

（*ii*）试问该企业 7 月、8 月、9 月这三个月因空气质量造成的经济损失总额的数学期望是否会超过 2.88 万元？说明你的理由.

【详解】（1）设 ξ 为选取的 3 天中空气质量为优的天数，

则 P（ξ=2）$=\frac{C_6^2C_{14}^1}{C_{20}^3}=\frac{7}{38}$，$P$（$\xi$=3）$=\frac{C_6^3}{C_{20}^3}=\frac{1}{57}$，

则这 3 天中空气质量至少有 2 天为优的概率为$\frac{7}{38}+\frac{1}{57}=\frac{23}{114}$；

（2）（*i*） $P(X=0)=P(0\le x\le 100)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$，

$P(X=220)=P(100<x\le 250)=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$，

$P(X=1480)=P(250<x\le 300)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$，

X 的分布列如下：

X	0	220	1480
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}$

（*ii*）由（*i*）可得：E（X）$=0\times\frac{1}{5}+220\times\frac{7}{10}+1480\times\frac{1}{10}=302$（元），

故该企业 9 月的经济损失的数学期望为 30E（X），即 30E（X）＝9060 元，

设 7 月、8 月每天因空气质量造成的经济损失为 *Y* 元，

可得： $P(Y=0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$， $P(Y=220)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$， $P(Y=1480)=\frac{1}{6}$，

E（Y）$=0\times\frac{1}{6}+220\times\frac{1}{3}+1480\times\frac{1}{6}=320$（元），

所以该企业 7 月、8 月这两个月因空气质量造成

经济损失总额的数学期望为 320×（31+31）＝19840（元），

由 19840+9060＝28900＞28800，

即 7 月、8 月、9 月这三个月因空气质量造成经济损失总额的数学期望会超过 2.88 万元.

22. 已知函数$f(x)=a\ln x-ax-3\left(a\in R且a\neq 0\right)$.

（1）求函数$f(x)$的单调区间；

（2）若函数$y=f(x)$的图像在点$\left(2,f(2)\right)$处的切线的倾斜角为$45°$，问：m在什么范围取值时，对于任意的$t\in[1,2]$，函数$g(x)=x^3+x^2\left[\frac{m}{2}+f'(x)\right]$在区间$(t,3)$上总存在极值？

（3）当$a=2$时，设函数$h(x)=(p-2)x-\frac{p+2e}{x}-3$，若在区间$[1,e]$上至少存在一个$x_0$，使得$h(x_0)>f(x_0)$成立，试求实数$p$的取值范围.

【答案】解：(Ⅰ) $\because f'(x)=\frac{a}{x}-a=a(\frac{1-x}{x})(x>0)$，

$\therefore$当$a>0$时，令$f'(x)>0$时，解得$0<x<1$，所以$f(x)$在$(0,1)$递增；
令$f'(x)<0$时，解得$x>1$，所以$f(x)$在$(1,+\infty)$递减.

当$a<0$时，$f'(x)=-a(\frac{x-1}{x})$，令$f'(x)>0$时，解得$x>1$，所以$f(x)$在$(1,+\infty)$递增；

令$f'(x)<0$时，解得$0<x<1$，所以$f(x)$在$(0,1)$递减；

(Ⅱ)因为函数$y=f(x)$的图象在点$(2,f(2))$处的切线的倾斜角为$45°$，

所以$f'(2)=1$，所以$a=-2$，$f'(x)=-\frac{2}{x}+2$，

$g(x)=x^3+x^2[\frac{m}{2}+f'(x)]=x^3+x^2[\frac{m}{2}+2-\frac{2}{x}]=x^3+(2+\frac{m}{2})\cdot x^2-2x$，

$\therefore g'(x)=3x^2+(4+m)x-2$，

因为对于任意的$t\in[1,2]$，函数$g(x)=x^3+x^2[\frac{m}{2}+f'(x)]$在区间$[t,3]$上总存在极值，

所以只需$g'(2)<0$，$g'(3)>0$，解得$-\frac{37}{3}<m<-9$；

(Ⅲ) $\therefore$令$F(x)=h(x)-f(x)=(p-2)x-\frac{p+2e}{x}-3-2lnx+2x+3=px-\frac{p}{x}-\frac{2e}{x}-2lnx$，

①当$p\leq 0$时，由$x\in[1,e]$得$px-\frac{p}{x}\leq 0$，$-\frac{2e}{x}-2lnx<0$.

所以，在$[1,e]$上不存在x_0，使得$h(x_0)>f(x_0)$成立；

②当$p>0$时，$F'(x)=\frac{px^2-2x+p+2e}{x^2}$，

$\because x\in[1,e]$，
$\therefore 2e-2x\geq 0$，$px^2+p>0$，$F'(x)>0$在$[1,e]$上恒成立，故$F(x)$在$[1,e]$上单调递增.

$\therefore F(x)_{max}=F(e)=pe-\frac{p}{e}-4$.

故只要$pe-\frac{p}{e}-4>0$，解得$p>\frac{4e}{e^2-1}$.所以p的取值范围是$(\frac{4e}{e^2-1},+\infty)$.