

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第一学期高三数学综合练习 1

考试范围：集合、常用逻辑用语、不等式、函数

班级_____姓名_____学号_____评价_____

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1. 设集合 $A = \{x ||x| \leq 2, x \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x | x^2 + x - 2 \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-2, -1, 0, 1\}$ D. $[-2, 1]$
2. 关于 x 的方程 $x^2 + ax + b = 0$, 有下列四个命题: 甲: $x=1$ 是该方程的根; 乙: $x=3$ 是该方程的根; 丙: 该方程两根之和为 2; 丁: 该方程两根异号. 如果只有一个假命题, 则该命题是()
 A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁
3. 全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{5\}$, 那么 $(\complement_U A) \cup B =$ ()
 A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{3, 4, 5\}$ C. $\{1, 4, 5\}$ D. $\{0, 1, 2, 5\}$
4. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则对实数 a, b , $a > b$ 是 $f(a) > f(b)$ 的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 函数 $f(x) = (ax-1)(x+b)$, 如果不等式 $f(x) > 0$ 解集是 $(-1, 3)$, 则不等式 $f(-2x) < 0$ 的解集是()
 A. $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ B. $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ C. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ D. $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
6. 设 $P: x^2 - 3ax + 2a^2 \leq 0$, 其中 $a > 0$; $q: \frac{1}{8} < 2^x < 8$. 若 P 是 q 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围为 ()
 A. $(1, \frac{3}{2})$ B. $(1, \frac{3}{2}]$ C. $(0, \frac{3}{2})$ D. $(0, \frac{3}{2}]$
7. 已知 $x, y > 0$, $\frac{3}{x+2} + \frac{3}{y+2} = 1$, 则 $x+2y$ 的最小值为()
 A. 9 B. 12 C. 15 D. $6\sqrt{2}+3$
8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & (x \leq 2) \\ x^2 - 6x + 8, & (x > 2) \end{cases}$. 若 $f(f(a)) \geq 0$, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $[-2, 2]$ B. $[-4, 3 + \sqrt{3}] \cup [3 + \sqrt{5}, +\infty)$ C. $[-2, 3 + \sqrt{3}]$ D. $[-2, 2] \cup [4, +\infty)$

二、多项选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

9. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{y | y = 2x - 3, x \in A\}$, 则集合 $A \cap B$ 子集可以为()
 A. $\emptyset$ B. $\{1\}$ C. $\{3\}$ D. $\{1, 3\}$

10. 十六世纪中叶,英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先把“=”作为等号使用,后来英国数学家哈利奥特首次使用“<”和“>”符号,并逐渐被数学界接受,不等号的引入对不等式的发展影响深远.若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $ab \neq 0$ 且 $a < b$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. 若 $0 < a < 1$, 则 $a^3 < a$
- C. 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{b+1}{a+1} > \frac{b}{a}$ D. 若 $c < b < a$ 且 $ac < 0$, 则 $cb^2 < ab^2$

11. 列命题中正确的是 ()

- A. “ $x < 0$ ”是“ $\ln(x+1) < 0$ ”的必要不充分条件
- B. 已知集合 $A = \{1, a\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则“ $a = 3$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的充要条件
- C. 若不等式 $ax^2 + 2x + c < 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$, 则 $a + c = 2$
- D. 若 $mx^2 + 3x + 2m < 0$ 对 $\forall m \in [0, 1]$ 恒成立, 则实数 x 的取值范围为 $(-2, -1)$

12. 若 $a > 0$, $b > 0$ 且 $a + b = 4$, 则下列不等式恒成立的是 ()

- A. $\frac{1}{ab} > \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1$ C. $\sqrt{ab} \geq 2$ D. $\frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{8}$

三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 若命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $k > x_0^2 + 1$ 成立”是假命题, 则实数 k 的取值范围是_____.

14. 已知集合 $A = \{a \in \mathbf{N} | \frac{12}{a-2} \in \mathbf{N}\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, 集合 C 满足 $B \subseteq C \subseteq A$, 则所有满足条件的集合 C 的个数为_____.

15. 已知 $\pi < \alpha + \beta < \frac{5\pi}{4}$, $-\pi < \alpha - \beta < -\frac{\pi}{3}$, 则 $2\alpha - \beta$ 的取值范围是_____.

16. 已知 $f(x) = \log_2(x-2)$, 若实数 m, n 满足 $f(m) + f(2n) = 3$, 则 $m+n$ 的最小值为_____.

四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17. 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{x+1}{x-3} \leq 0\right\}$, $B = \{x \mid x^2 - (m-1)x + m - 2 \leq 0\}$.

(1) 若 $A \cup [a, b] = [-1, 4]$, 求实数 a, b 满足的条件;

(2) 若 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围.

18. 已知关于 x 的一元二次不等式 $x^2 + 2mx + m + 2 \geq 0$ 的解集为 R .

(1) 求实数 m 的取值范围;

(2) 求函数 $f(m) = m + \frac{3}{m+2}$ 的最小值;

(3) 解关于 x 的一元二次不等式 $x^2 + (m-3)x - 3m > 0$.

19. 已知 p : 实数 x 满足不等式 $x^2 - (2a+2)x + a(a+2) \leq 0$; q : 实数 x 满足不等式组 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0, \\ x^2 + 2x - 8 > 0. \end{cases}$ 若

p 是 q 的必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.

20. 中国“一带一路”战略构思提出后, 某科技企业为抓住“一带一路”带来的机遇, 决定开发生产一款大型电子设备. 生产这种设备的年固定成本为 500 万元, 每生产 x 台, 需另投入成本 $c(x)$ (万元), 当年产量不足 60 台时, $c(x) = x^2 + 20x$ (万元); 当年产量不小于 60 台时,

$c(x) = 102x + \frac{9800}{x} - 2080$ (万元). 若每台设备售价为 100 万元, 通过市场分析, 该企业生产的电子设备能全部售完.

(1) 求年利润 (万元) 关于年产量 x (台) 的函数关系式;

(2) 当年产量为多少台时, 该企业在这—电子设备的生产中所获利润最大?

21. 已知函数 $f(x) = \ln x - x - \frac{a}{x}$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极大值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

22. 已知函数 $f(x) = x^3 + (1-a)x^2 - a(a+2)x$, $g(x) = \frac{19}{6}x - \frac{1}{3}$, 若对任意 $x_1 \in [-1, 1]$, 总存在 $x_2 \in$

$[0, 2]$, 使得 $f(x_1) + 2ax_1 = g(x_2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1. 设集合 $A = \{x | |x| \leq 2, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x | x^2 + x - 2 \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-2, -1, 0, 1\}$ D. $[-2, 1]$

【解析】 $\because A = \{x | -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 1\}$,

$\therefore A \cap B = \{0, 1\}$. 故选: B.

2.(2021 新高考 8 省联考)关于 x 的方程 $x^2 + ax + b = 0$, 有下列四个命题:

甲: $x = 1$ 是该方程的根; 乙: $x = 3$ 是该方程的根;

丙: 该方程两根之和为 2; 丁: 该方程两根异号.

如果只有一个假命题, 则该命题是()

- A.甲 B.乙 C.丙 D.丁

答案 A

解析 若甲、乙都是真命题, 则 $x_1 + x_2 = 4$, 与丙矛盾, 则甲、乙必有一个错误, 若甲是真命题, 又由丙可知, 方程有两个重根为 1, 与丁矛盾, 则乙是真命题, 又由丙可知方程的两根分别为 3 和 -1, 符合丁, 故甲是假命题.

3.全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{5\}$, 那么 $(\complement_U A) \cup B =$ ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{3, 4, 5\}$
C. $\{1, 4, 5\}$ D. $\{0, 1, 2, 5\}$

答案 B

解析 $\because U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{5\}$,

$\therefore \complement_U A = \{3, 4, 5\}$, $(\complement_U A) \cup B = \{3, 4, 5\}$.

4. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则对实数 a, b , $a > b$ 是 $f(a) > f(b)$ 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

解: 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减.

当 $a > b > 0$ 时, 满足 $f(a) > f(b)$.

故 $a > b$ 时, $f(a) > f(b)$ 不成立.

当 $f(a) > f(b)$ 时, 不能确定 a, b 的大小. 故选: D.

5. 函数 $f(x) = (ax-1)(x+b)$, 如果不等式 $f(x) > 0$ 解集是 $(-1, 3)$, 则不等式 $f(-2x) < 0$ 的解集是()

A. $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

B. $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

C. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

D. $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

答案 A

解析 由 $f(x) > 0$, 得 $ax^2 + (ab-1)x - b > 0$,

又其解集是 $(-1, 3)$, $\therefore a < 0$, 且 $\begin{cases} \frac{1-ab}{a} = 2, \\ -\frac{b}{a} = -3, \end{cases}$

解得 $a = -1$ 或 $\frac{1}{3}$ (舍去), $\therefore a = -1, b = -3. \therefore f(x) = -x^2 + 2x + 3, \therefore f(-2x) = -4x^2 - 4x + 3$, 由 $-4x^2 - 4x + 3 < 0$, 得 $4x^2 + 4x - 3 > 0$, 解得 $x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -\frac{3}{2}$, 故选 A.

6. 设 $P: x^2 - 3ax + 2a^2 \leq 0$, 其中 $a > 0$; $Q: \frac{1}{8} < 2^x < 8$. 若 P 是 Q 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $(1, \frac{3}{2})$ B. $(1, \frac{3}{2}]$ C. $(0, \frac{3}{2})$ D. $(0, \frac{3}{2}]$

【答案】C

【解析】解不等式 $x^2 - 3ax + 2a^2 \leq 0 (a > 0)$, 可得 $a \leq x \leq 2a$. 解不等式 $\frac{1}{8} < 2^x < 8$, 可得

$-3 < x < 3$. 若 P 是 Q 的充分不必要条件, 则有 $\begin{cases} a > -3 \\ 2a < 3 \\ a > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < a < \frac{3}{2}$, 所以实数 a 的取值范

围为 $(0, \frac{3}{2})$. 故选: C.

7. 已知 $x, y > 0$, $\frac{3}{x+2} + \frac{3}{y+2} = 1$, 则 $x+2y$ 的最小值为()

A. 9

B. 12

C. 15

D. $6\sqrt{2}+3$

答案 D

解析 由题意, 可令 $a=x+2$, $b=y+2$, 则 $x=a-2$, $y=b-2$, 于是 $\frac{3}{a} + \frac{3}{b} = 1 (a>2, b>2)$, 而 $x+2y=a+2b-6$, $a+2b=(a+2b)\left(\frac{3}{a} + \frac{3}{b}\right) = 9 + \frac{6b}{a} + \frac{3a}{b} \geq 9 + 6\sqrt{2}$ (当且仅当 $a^2=2b^2$ 时取等号), 故 $x+2y$ 的最小值为 $6\sqrt{2}+3$, 故选 D.

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & (x \leq 2) \\ x^2-6x+8, & (x > 2) \end{cases}$. 若 $f(f(a)) \geq 0$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[-2, 2]$

B. $[-4, 3+\sqrt{3}] \cup [3+\sqrt{5}, +\infty)$

C. $[-2, 3+\sqrt{3}]$

D. $[-2, 2] \cup [4, +\infty)$

【答案】B

【解析】当 $f(a) \leq 2$ 时, 由 $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & (x \leq 2) \\ x^2-6x+8, & (x > 2) \end{cases}$, $f(f(a)) \geq 0$,

则 $2-|f(a)| \geq 0$, 解得 $-2 \leq f(a) \leq 2$, 当 $a \leq 2$ 时, 可得 $-2 \leq 2-|a| \leq 2$, 解得 $-4 \leq a \leq 4$, 此时可得 $-4 \leq a \leq 2$; 当 $a > 2$ 时, 可得 $-2 \leq a^2-6a+8 \leq 2$,

即 $\begin{cases} a^2-6a+6 \leq 0 \\ a^2-6a+10 \geq 0 \end{cases}$, 解得 $3-\sqrt{3} \leq a \leq 3+\sqrt{3}$, 此时可得 $2 < a \leq 3+\sqrt{3}$;

当 $f(a) > 2$ 时, 可得 $f^2(a)-6f(a)+8 \geq 0$, 解得 $f(a) \geq 4$ 或 $f(a) \leq 2$, 所以 $f(a) \geq 4$, 当

$a \leq 2$ 时, 可得 $2-|a| \geq 4$, 此时无解; 当 $a > 2$ 时, 可得 $a^2-6a+8 \geq 4$,

解得 $a \geq 3+\sqrt{5}$ 或 $a \leq 3-\sqrt{5}$, 此时可得 $a \geq 3+\sqrt{5}$; 综上所述, 实数 a 的取值范围是

$[-4, 3+\sqrt{3}] \cup [3+\sqrt{5}, +\infty)$ 故选: B

二、多项选择题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

9. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{y | y = 2x - 3, x \in A\}$, 则集合 $A \cap B$ 的子集可以为

()

A. $\emptyset$

B. $\{1\}$

C. $\{3\}$

D. $\{1, 3\}$

答案 ABCD

解析 由题意, 得 $B = \{-1, 1, 3, 5\}$, $\therefore A \cap B = \{1, 3\}$. 故集合 $A \cap B$ 的子集可以为 $\emptyset$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$.

10. 十六世纪中叶, 英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先把“=”作为等号使用, 后来英国数学家哈利奥特首次使用“<”和“>”符号, 并逐渐被数学界接受, 不等号的引入对不等式的发展影响深远. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则下列命题正确的是 ()

A. 若 $ab \neq 0$ 且 $a < b$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

B. 若 $0 < a < 1$, 则 $a^3 < a$

C. 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{b+1}{a+1} > \frac{b}{a}$

D. 若 $c < b < a$ 且 $ac < 0$, 则 $cb^2 < ab^2$

【答案】BC

【解析】A. 取 $a = -2, b = 1$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 不成立. B. 若 $0 < a < 1$, 则 $a^3 - a = a(a^2 - 1) < 0$, $\therefore a^3 < a$, 因此正确. C. 若 $a > b > 0$, 则 $a(b+1) - b(a+1) = a - b > 0$, $\therefore a(b+1) - b(a+1) > 0$, $\therefore \frac{b+1}{a+1} > \frac{b}{a}$, 正确; D. 若 $c < b < a$ 且 $ac < 0$, 则 $a > 0, c < 0$, 而 b 可能为 0, 因此 $cb^2 < ab^2$ 不正确. 故选: BC.

11. 列命题中正确的是 ()

A. “ $x < 0$ ”是“ $\ln(x+1) < 0$ ”的必要不充分条件

B. 已知集合 $A = \{1, a\}, B = \{1, 2, 3\}$, 则“ $a = 3$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的充要条件

C. 若不等式 $ax^2 + 2x + c < 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$, 则 $a + c = 2$

D. 若 $mx^2 + 3x + 2m < 0$ 对 $\forall m \in [0, 1]$ 恒成立, 则实数 x 的取值范围为 $(-2, -1)$

【答案】ACD

12. 若 $a > 0, b > 0$ 且 $a + b = 4$, 则下列不等式恒成立的是 ()

A. $\frac{1}{ab} > \frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1$

C. $\sqrt{ab} \geq 2$

D. $\frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{8}$

【答案】BD

【解析】由 $a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{4}$ ，故 A 错误；

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{\sqrt{4}} = 1, \text{故 B 正确；}$$

又前面可知 $\sqrt{ab} \leq 2$ ，故 C 错误；

$$\text{由 } a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = 8, \text{故 D 正确，故选 BD.}$$

三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13.(2020·宿迁联考)若命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ ，使得 $k > x_0^2 + 1$ 成立”是假命题，则实数 k 的取值范围是_____.

答案 $(-\infty, 1]$

解析 “ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ ，使得 $k > x_0^2 + 1$ 成立”是假命题等价于“ $\forall x \in \mathbb{R}$ ，都有 $k \leq x^2 + 1$ 恒成立”是真命题. 因为 $x^2 + 1 \geq 1$ ，即 $x^2 + 1$ 的最小值为 1，要使 $k \leq x^2 + 1$ 恒成立，只需 $k \leq (x^2 + 1)_{\min}$ ，即 $k \leq 1$.

14. 已知集合 $A = \{a \in \mathbb{N} \mid \frac{12}{a-2} \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ ，集合 C 满足 $B \subseteq C \subseteq A$ ，则所有满足条件的集合 C 的个数为_____.

【解析】 $\because$ 集合 $A = \{a \in \mathbb{N} \mid \frac{12}{a-2} \in \mathbb{N}\}$,

$\therefore$ 当 $a=0$ 时， $\frac{12}{a-2} = -6$ ，不合题意，舍去；

当 $a=1$ 时， $\frac{12}{a-2} = -12$ ，不合题意，舍去；

当 $a=2$ 时， $\frac{12}{a-2}$ 无意义，不合题意，舍去；

当 $a=3$ 时， $\frac{12}{a-2} = 12$ ，合题意， $\therefore a=3$ ；

当 $a=4$ 时， $\frac{12}{a-2} = 6$ ，合题意， $\therefore a=4$ ；

当 $a=5$ 时, $\frac{12}{a-2}=4$, 合题意, $\therefore a=5$;

当 $a=6$ 时, $\frac{12}{a-2}=3$, 合题意, $\therefore a=6$;

当 $a=7$ 时, $\frac{12}{a-2}=\frac{12}{5}$, 不合题意, 舍去;

当 $a=8$ 时, $\frac{12}{a-2}=2$, 合题意, $\therefore a=8$;

...

当 $a=14$ 时, $\frac{12}{a-2}=1$, 合题意, $\therefore a=14$;

$\therefore A=\{3, 4, 5, 6, 8, 14\}$, 且 $B=\{3, 4, 5\}$, $\because B \subseteq C \subseteq A$,

$\therefore C=\{3, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 8\}, \{3, 4, 5, 14\}, \{3, 4, 5, 6, 8\}, \{3, 4, 5, 6, 14\}, \{3, 4, 5, 8, 14\}, \{3, 4, 5, 6, 8, 14\}$. 故满足条件的 C 有 8 个.

15. 已知 $\pi < \alpha + \beta < \frac{5\pi}{4}$, $-\pi < \alpha - \beta < -\frac{\pi}{3}$, 则 $2\alpha - \beta$ 的取值范围是_____

解: 令 $x = \alpha + \beta \in (\pi, \frac{5\pi}{4})$, $y = \alpha - \beta \in (-\pi, -\frac{\pi}{3})$, 则 $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$,

$$\therefore 2\alpha - \beta = x + y - \frac{x-y}{2} = \frac{x+3y}{2} \in (-\pi, \frac{\pi}{8})$$

故答案为: $(-\pi, \frac{\pi}{8})$.

16、已知 $f(x) = \log_2(x-2)$, 若实数 m, n 满足 $f(m) + f(2n) = 3$, 则 $m+n$ 的最小值为_____.

已知 $f(x) = \log_2(x-2)$, 若实数 m, n 满足 $f(m) + f(2n) = 3$, 则 $m+n$ 的最小值为_____

思路 1 (消元): 由 $(m-2)(n-1) = 4$ 得 $m = \frac{4}{n-1} + 2$, 则 $m+n = n + \frac{4}{n-1} + 2$,

思路 2: 令 $m+n = s$, 则 $m = s-n$, 代入 $(m-2)(n-1) = 4$ 后用判别式法, 求出最值后要注意检

验。思路 3: $(m-2)(n-1) = 4$ 与待求式之间的关系, 我们有:

$$m+n = (m-2) + (n-1) + 3 \geq 2\sqrt{(m-2)(n-1)} + 3 = 7$$

四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分)

17. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x+1}{x-3} \leq 0 \right\}$, $B = \{ x \mid x^2 - (m-1)x + m - 2 \leq 0 \}$.

(1) 若 $A \cup [a, b] = [-1, 4]$, 求实数 a, b 满足的条件;

(2) 若 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $b = 4$, $-1 \leq a \leq 3$; (2) $1 \leq m < 5$.

【分析】

(1) 直接利用并集结果可得 $b = 4$, $-1 \leq a \leq 3$;

(2) 根据 $A \cup B = A$ 可得 $B \subseteq A$, 再对集合 B 的解集情况进行分类讨论, 即可得答案;

【详解】

解: (1) $\because A = \left\{ x \mid \frac{x+1}{x-3} \leq 0 \right\} = \{ x \mid -1 \leq x < 3 \}$; $A \cup [a, b] = [-1, 4]$,

$\therefore b = 4$, $-1 \leq a \leq 3$;

(2) $\because B = \{ x \mid x^2 - (m-1)x + m - 2 \leq 0 \} = \{ x \mid (x-1)(x-(m-2)) \leq 0 \}$, $A \cup B = A$

$\therefore B \subseteq A$

$\therefore$ 分情况讨论 ① $m-2 < 1$, 即 $m < 3$ 时 $\begin{cases} m-2 \geq -1 \\ m-2 < 1 \end{cases}$ 得 $1 \leq m < 3$;

② 若 $m-2 = 1$, 即 $m = 3$, B 中只有一个元素 1 符合题意;

③ 若 $m-2 > 1$, 即 $m > 3$ 时 $\begin{cases} m-2 < 3 \\ m-2 > 1 \end{cases}$ 得 $3 < m < 5$, $\therefore 3 < m < 5$

$\therefore$ 综上 $1 \leq m < 5$.

18 已知关于 x 的一元二次不等式 $x^2 + 2mx + m + 2 \geq 0$ 的解集为 R .

(1) 求实数 m 的取值范围;

(2) 求函数 $f(m) = m + \frac{3}{m+2}$ 的最小值;

(3) 解关于 x 的一元二次不等式 $x^2 + (m-3)x - 3m > 0$.

【解析】(1) $\because x^2 + 2mx + m + 2 \geq 0$ 的解集为 R , $\therefore \Delta = 4m^2 - 4(m+2) \leq 0$,

解得 $-1 \leq m \leq 2$. $\therefore$ 实数 m 的取值范围: $[-1, 2]$.

$$(2) \because -1 \leq m \leq 2 \therefore 0 < 1 \leq m+2 \leq 4.$$

$$\therefore f(m) = m + \frac{3}{m+2} = m+2 + \frac{3}{m+2} - 2 \geq 2\sqrt{(m+2)\frac{3}{m+2}} - 2 = 2\sqrt{3} - 2,$$

当且仅当 $m = \sqrt{3} - 2$ 时取等号, $\therefore$ 函数 $f(m) = m + \frac{3}{m+2}$ 的最小值为 $2\sqrt{3} - 2$;

$$(3) x^2 + (m-3)x - 3m > 0. \text{可化为 } (x+m)(x-3) > 0,$$

$$\because -1 \leq m \leq 2 \therefore -2 \leq -m \leq 1 < 3.$$

$$\therefore \text{不等式的解集为 } (-\infty, -m) \cup (3, +\infty).$$

19. (本小题满分 12 分) 已知 p : 实数 x 满足不等式 $x^2 - (2a+2)x + a(a+2) \leq 0$; q : 实数

x 满足不等式组 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0, \\ x^2 + 2x - 8 > 0. \end{cases}$ 若 p 是 q 的必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.

解 由 $x^2 - (2a+2)x + a(a+2) \leq 0$, 得 $a \leq x \leq a+2$,

记 $A = \{x | a \leq x \leq a+2\}$.

由 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0, \\ x^2 + 2x - 8 > 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} -2 \leq x \leq 3, \\ x < -4 \text{ 或 } x > 2, \end{cases}$ 即 $2 < x \leq 3$,

记 $B = \{x | 2 < x \leq 3\}$.

因为 p 是 q 的必要不充分条件, 所以 $\begin{cases} a \leq 2, \\ a+2 \geq 3, \end{cases}$ 解得 $1 \leq a \leq 2$,

故实数 a 的取值范围为 $[1, 2]$.

20. 中国“一带一路”战略构思提出后, 某科技企业为抓住“一带一路”带来的机遇, 决定开发生产一

款大型电子设备. 生产这种设备的年固定成本为 500 万元, 每生产 x 台, 需另投入成本 $c(x)$ (万元

), 当年产量不足 60 台时, $c(x) = x^2 + 20x$ (万元); 当年产量不小于 60 台时,

$c(x) = 102x + \frac{9800}{x} - 2080$ (万元). 若每台设备售价为 100 万元, 通过市场分析, 该企业生产的

电子设备能全部售完.

(1) 求年利润(万元)关于年产量 x (台)的函数关系式;

(2) 当年产量为多少台时, 该企业在这一电子设备的生产中所获利润最大?

【解题思路】(1) 根据条件, 利润 y 为分段函数, 分别表示即可;

(2) 分别求出各段上利润 y 的最大值, 利用二次函数最值和基本不等式求最值方法即可.

解: (1) 设利润为 y 万元, 由题得,

$$\text{当 } 0 < x < 60 \text{ 时, } y = 100x - (x^2 + 2x) - 500 = -x^2 + 98x - 500;$$

$$\text{当 } x \geq 60 \text{ 时, } y = 100x - \left(102x + \frac{9800}{x} - 2080\right) - 500 = 1580 - 2\left(x + \frac{4900}{x}\right),$$

$$\text{则 } y = \begin{cases} -x^2 + 98x - 500, & 0 < x < 60 \\ 1580 - 2\left(x + \frac{4900}{x}\right), & x \geq 60 \end{cases} (x \in N);$$

(2) 由(1)得, 当 $0 < x < 60$ 时, $y = -(x-49)^2 + 1100$, 所以 $x = 49$ 时 y 取最大值为 1100 万元;

$$\text{当 } x \geq 60 \text{ 时, 有 } y = 1580 - 2\left(x + \frac{4900}{x}\right) \leq 1580 - 4\sqrt{x \cdot \frac{4900}{x}} = 1300, \text{ 当且仅当 } x = \frac{4900}{x} \text{ 时即}$$

$x = 70$ 时取等, 此时 y 最大值为 1300 万元,

综上: 当年产量为 70 台时, 该企业的设备的生产中所获得的利润最大为 1300 万元.

21. 已知函数 $f(x) = \ln x - x - \frac{a}{x}$, $a \in \mathbf{R}$. (1) 当 $a = 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极大值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

规范解答 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$(1) \text{ 当 } a = 0 \text{ 时, } f(x) = \ln x - x, f'(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = 1. (1 \text{ 分})$$

列表：

x	$(0,1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		极大值	

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1) = -1$. (3 分)

(2) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{a}{x^2} = \frac{-x^2 + x + a}{x^2}$.

令 $f'(x) = 0$ ，得 $-x^2 + x + a = 0$ ，记 $\Delta = 1 + 4a$.

① 当 $a \leq -\frac{1}{4}$ 时， $f'(x) \leq 0$ ，所以 $f(x)$ 单调减区间为 $(0, +\infty)$ ；(5 分)

② 当 $a > -\frac{1}{4}$ 时，由 $f'(x) = 0$ ，得 $x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ ， $x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

a. 若 $-\frac{1}{4} < a < 0$ ，则 $x_1 > x_2 > 0$.

由 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < x_2$ 或 $x > x_1$ ；由 $f'(x) > 0$ 得 $x_2 < x < x_1$. 所以 $f(x)$ 的单调减区间为 $\left(0, \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}\right)$,

$\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, +\infty$ ，单调增区间为 $\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\right)$. (7 分)

b. 若 $a = 0$ ，由 (1) 知 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,1)$ ，单调减区间为 $(1, +\infty)$.

c. 若 $a > 0$ ，则 $x_1 > 0 > x_2$. 由 $f'(x) < 0$ ，得 $x > x_1$ ；由 $f'(x) > 0$ ，得 $0 < x < x_1$. 所以 $f(x)$ 的单调减区间为

$\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, +\infty\right)$ ，单调增区间为 $\left(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\right)$. (8 分)

综上所述，当 $a \leq -\frac{1}{4}$ 时， $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, +\infty)$ ；

当 $-\frac{1}{4} < a < 0$ 时， $f(x)$ 的单调减区间为 $0, \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}, \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, +\infty\right)$ ，单调增区间为

$\frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ ；

当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 的单调减区间为 $\left(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, +\infty\right)$, 单调增区间为 $\left(0, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)$. (12 分)

22. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = x^3 + (1-a)x^2 - a(a+2)x$, $g(x) = \frac{19}{6}x - \frac{1}{3}$, 若对任意 $x_1 \in [-1, 1]$, 总存在 $x_2 \in [0, 2]$, 使得 $f'(x_1) + 2ax_1 = g(x_2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

解 由题意知, $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的值域为 $\left[-\frac{1}{3}, 6\right]$.

令 $h(x) = f'(x) + 2ax = 3x^2 + 2x - a(a+2)$,

则 $h'(x) = 6x + 2$, 由 $h'(x) = 0$ 得 $x = -\frac{1}{3}$.

当 $x \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right]$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $[h(x)]_{\min} = h\left(-\frac{1}{3}\right) = -a^2 - 2a - \frac{1}{3}$.

又由题意可知, $h(x)$ 的值域是 $\left[-\frac{1}{3}, 6\right]$ 的子集, 所以
$$\begin{cases} h(-1) \leq 6, \\ -a^2 - 2a - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}, \\ h(1) \leq 6, \end{cases}$$

解得实数 a 的取值范围是 $[-2, 0]$.