2021年普通高等学校招生全国统一考试·新高考模拟卷(二)

一、选择题:

1. 已知集合 $A=\{x|0<x<1\}$,$B=\{x|2^{x+1}>\sqrt{2}\}$,则 $A\cup B=$(　　)

A. $(0,1)$　　B. $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$　　C. $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $(0,+\infty)$

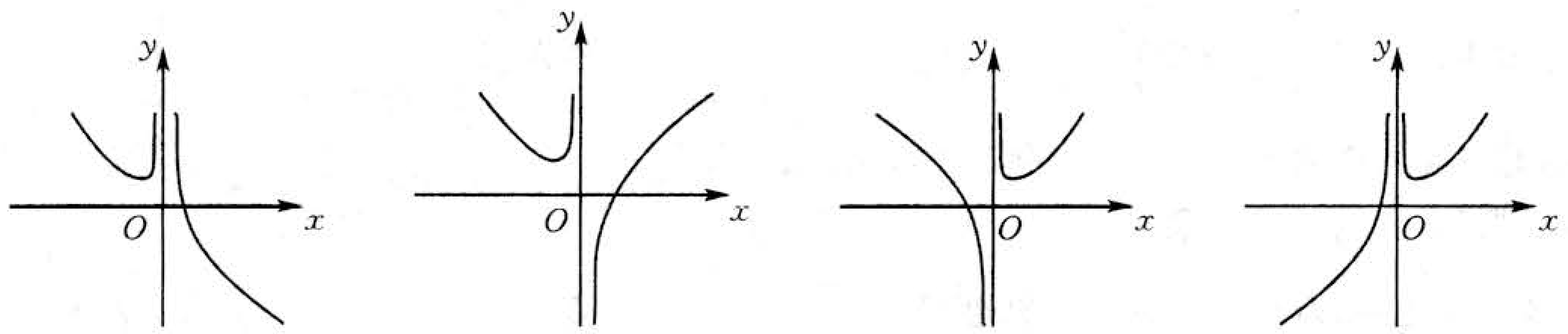
2. 复数 $z=\dfrac{2i}{3+i}$ 在复平面内的对应点位于(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知 α,β,γ 是三个不同的平面,m,n 是两条不同的直线,若 $\alpha\cap\gamma=m$,$\beta\cap\gamma=n$,则"$\alpha/\!/\beta$"是"$m/\!/n$"的(　　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

4. 函数 $f(x)=|x|-\dfrac{3}{x}$ 的部分图象大致为(　　)



A　　B　　C　　D

5. 设 a,b 为正数,且 $a+b=7$,则 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+2}$ 的最小值为(　　)

A. $\dfrac{7}{2}$　　B. $\dfrac{2}{7}$　　C. $\dfrac{2}{5}$　　D. 2

6. 一个大型喷水池的中央有一个强力喷水柱,为了测量喷水柱喷出的水柱的高度,某人在喷水柱正西方向的点 A 测得水柱顶端的仰角为 $45°$,沿点 A 向北偏东 $30°$ 前进 100 m 到达点 B,在 B 点测得水柱顶端的仰角为 $30°$,则水柱的高度是(　　)

A. 50 m　　B. 100 m　　C. 120 m　　D. 150 m

7. 已知 F 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点,P 为抛物线上一点,O 为坐标原点,若 $|PF|=3|OF|$,$\triangle POF$ 的面积为 $3\sqrt{2}$,则抛物线方程为(　　)

A. $y^2=4\sqrt{3}x$　　B. $y^2=2\sqrt{3}x$　　C. $y^2=4x$　　D. $y^2=2x$

8. 设 $a=\log_{0.1}3$,$b=\log_{40}3$,则(　　)

A. $2ab<2(a+b)<ab$　　B. $2ab<a+b<4ab$　　C. $ab<a+b<2ab$　　D. $2ab<a+b<ab$

二、选择题:

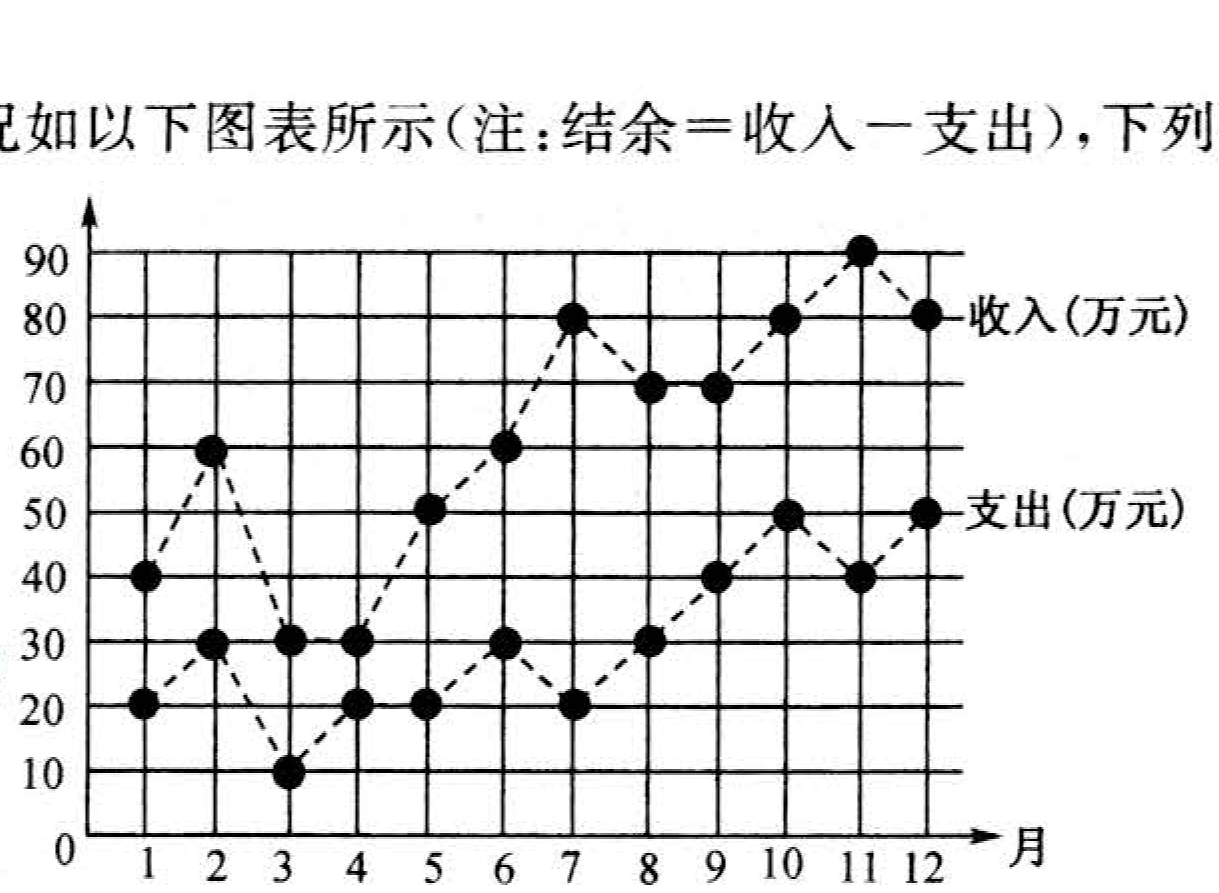
9. 某企业 2019 各月份的收入、支出的统计情况如以下图表所示(注:结余=收入-支出),下列说法中正确的是(　　)

A. 上半年的平均月支出为 $\dfrac{65}{3}$ 万元

B. 结余最多的月份是 7 月份

C. 月结余的中位数为 30 万元

D. 结余最少的月份是 1 月份



10. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$,则(　　)

A. $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$

B. $f(x)$ 的最小正周期为 π

C. $f\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$ 为奇函数

D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{11\pi}{12}$ 对称

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，直线 $bx-ay+2a=0$ 上存在点 $P(x_0,\ y_0)$，使圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=2$ 与双曲线 C 的右支有公共点，则双曲线 C 的离心率可以是（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} xe^x+1,(x\leqslant 0) \\ x-\ln x-2,(x>0) \end{cases}$，若方程 $f(x)=a$ 有 4 个不同的实数根 x_1,x_2,x_3,x_4 $(x_1<x_2<x_3<x_4)$，则（　　）

A. 函数 $f(x)$ 的最大值为1　B. 函数 $f(x)$ 的最小值为-1　C. $a\in\left(1-\frac{1}{e},1\right)$　D. $\frac{a}{e^{x_2}}\in(1,e-1)$

三、填空题：

13. $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中 x 与 x^{-1} 的系数之比为________.

14. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

15. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_2+a_4=10$，$S_3=9$，则数列 $\left\{\frac{1}{S_n+n}\right\}$ 的前 n 项和为________.

16. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的表面上，$PA\perp$ 平面 ABC，$AC=\sqrt{3}$，$AB=BC=1$，$PA=2$，则球 O 的表面积为________.

四、解答题：

17. 在①a_1+1,a_2+2,a_3+4 成等比数列；②若 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，且 $S_5=2S_3$ 中任选一个，补充在下面的问题中，并解答.

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=2$，___.(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；(2)求数列 $\{a_n-2^n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：(1)选①∵$\{a_n\}$ 的公差为 $d=2$，∴$a_2=a_1+2,a_3=a_1+4$. ∵a_1+1,a_2+2,a_3+4 成等比数列.

∴$(a_1+1)(a_1+8)=(a_1+4)^2$，解得 $a_1=8$，从而 $a_n=8+2(n-1)=2n+6$. ………………………… 4 分

选②∵$S_5=2S_3$，∴$5a_1+\frac{5\times4}{2}d=2\left(3a_1+\frac{3\times2}{2}d\right)$，∴$a_1=4d$. 又 $d=2$，∴$a_1=8$，从而 $a_n=8+2(n-1)=2n+6$.

(2)由(1)得 $a_n=2n+6$，∴$a_n-2^n=(2n+6)-2^n$

∴$T_n=[8+10+\cdots+(2n+6)]-(2+2^2+\cdots+2^n)=\frac{n(8+2n+6)}{2}-\frac{2-2\times2^n}{1-2}=n(n+7)-(2^{n+1}-2)$

$=n^2+7n-2^{n+1}+2$. ………………………………………………… 10 分

18. 设 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+1$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)在锐角△ABC 中，若 $f\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，$a=\sqrt{3}$，求△$ABC$ 周长的取值范围.

解：(1)$f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1+\cos x}{2}+1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$. ……… 3 分

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，解得 $2k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{2\pi}{3}$；……………………… 4 分

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，解得 $2k\pi+\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{3}$，……………………… 5 分

∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$，单调递减区间为 $\left[2k\pi+\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$；

(2)由 $f\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由题意知 A 为锐角，∴$A=\frac{\pi}{3}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $b+c=2(\sin B+\sin C)$. 又 $0<B<\frac{\pi}{2}$，$0<C<\frac{\pi}{2}$，∴$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，….8分

∴$b+c=2\left[\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in(3,2\sqrt{3}]$. ∴△$ABC$ 周长的取值范围为 $(3+\sqrt{3},3\sqrt{3}]$.

……………… 12分

19. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$BC=CD=2AD=2$，$BC\perp CD$，$PA=2$，$PB=PC=3$，E 为 BC 中点.

(1)求证：$PA\perp$ 平面 ABC；(2)求二面角 $B-PD-C$ 的余弦值.

(1)证明：连接 AE，则四边形 $AECD$ 为矩形，∴$AE=CD=2$. 又 $BE=EC=1$，∴$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{5}$.

∵$PA=2,PB=3$，∴$PA^2+AB^2=PB^2$，∴$PA\perp AB$. ……………………………………… 2 分

同理 $PA^2+AE^2=PE^2=8$，∴$PA\perp AE$. ……………………………………… 4 分

$\because AE\cap AB=A$，$\therefore PA\perp$平面 ABC；………………………………………………………… 6 分

(2)解：以 A 为原点，AE,AD,AP 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，则 $P(0,0,2)$，$D(0,1,0)$，$B(2,-1,0)$，$C(2,1,0)$.

设平面 PDB 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}y-2z=0\\ -2x+2y=0\end{cases}$，

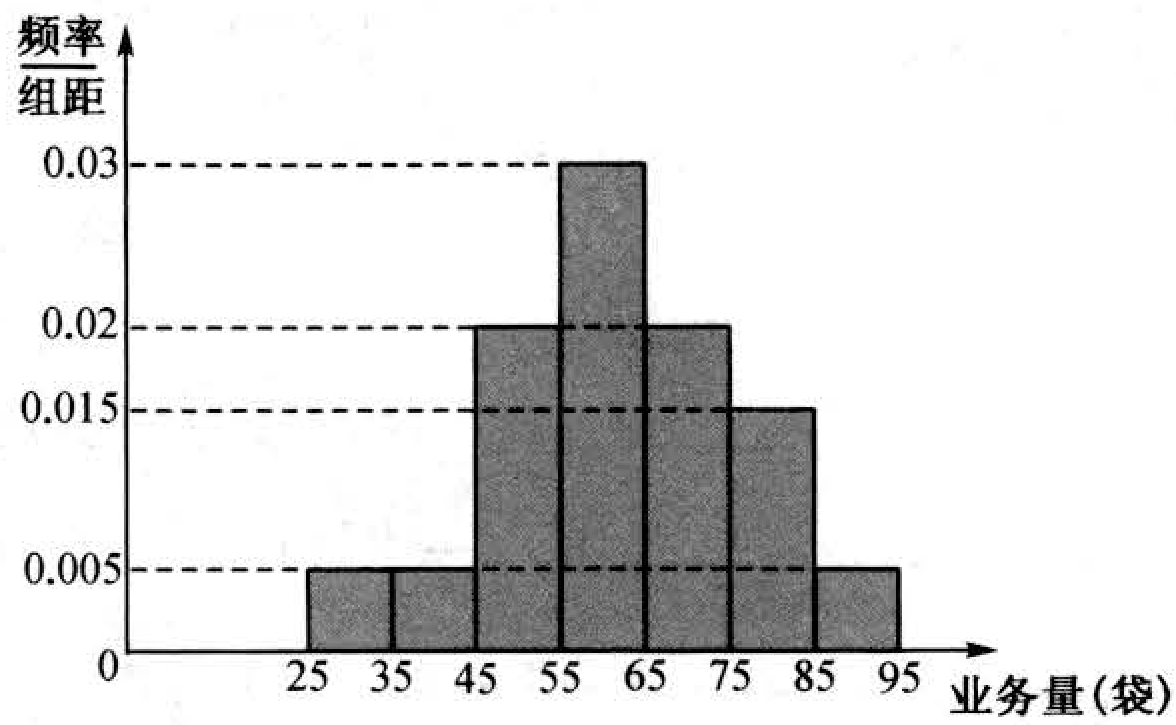
令 $z=1$，则 $x=2,y=2$，$\therefore \boldsymbol{m}=(2,2,1)$，………………………………………………………… 8 分

同理平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,2,1)$.………………………………………………………… 10 分

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

$\because$二面角 $B-PD-C$ 为锐角，$\therefore$二面角 $B-PD-C$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.………………………………… 12 分

20. 某超市为了促销某品牌粮食，制定了两种销售日工资方案：方案(a)规定销售员每日底薪 80 元，销售员每销售一袋提成 2 元；方案(b)规定每日底薪 100 元，销售的前 55 袋没有提成，从第 56 袋开始，每卖一袋提成 5 元，该超市记录了每天销售员的人均日业绩，现随机抽取 100 天的数据，将样本数据分为$[25,35)$，$[35,45)$，$[45,55)$，$[55,65)$，$[65,75)$，$[75,85)$，$[85,95]$七组，整理得到如图所示的频率分布直方图.



(1)随机选取一天，估计这一天该超市某品牌销售人员的人均日业绩不少于 55 袋的概率；

(2)从以往统计数据看，新销售员选择日工资方案(a)的概率为$\dfrac{1}{4}$，选择方案(b)的概率为$\dfrac{3}{4}$. 若甲、乙、丙三名销售员分别到该超市应聘，三人选择日工资方案相互独立，求至少有两名销售员选择方案(a)的概率；

(3)若仅从人均日收入的角度考虑，请你利用所学的统计学知识为新销售员做出日工资方案的选择，并说明理由.(同组中的每个数据用该组区间的中点值代替)

解：(1)设事件 A 为"随机选取一天，这一天该超市的销售员人均日业绩不少于 55 袋"，

依题意，该超市店的人均日业绩不少于 55 袋的频率分别为：0.3，0.2，0.15，0.05.

因为 $0.3+0.2+0.15+0.05=0.7$，所以 $P(A)$估计为 0.7.……………………………………………… 2 分

(2)设事件 B 为"甲、乙、丙三名销售员中至少有两名销售员选择方案(a)"

设事件 C_i 为"甲乙丙三名销售员中恰有 $i(i=0,1,2,3)$人选择方案(a)"，

则 $P(B)=P(C_2)+P(C_3)=C_3^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^1+C_3^3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{9}{64}+\dfrac{1}{64}=\dfrac{5}{32}$，

所以三名销售员中至少有两名销售员选择方案(a)的概率为$\dfrac{5}{32}$.…………………………………… 4 分

(3)设销售员每日完成业绩为 x 袋　方案(a)的日工资 $Y_1=80+2x(x\in\mathbf{N}^*)$，……………………… 5 分

方案(b)的日工资 $Y_2=\begin{cases}100,x\leqslant 55,x\in\mathbf{N}^*\\ 100+5(x-55),x>55,x\in\mathbf{N}^*\end{cases}$ ……………………………………………… 6 分

所以随机变量 Y_1 的分布列为

Y_1	140	160	180	200	220	240	260
P	0.05	0.05	0.2	0.3	0.2	0.15	0.05

$EY_1=140\times0.05+160\times0.05+180\times0.2+200\times0.3+220\times0.2+240\times0.15+260\times0.05=204$；… 8 分

同理随机变量 Y_2 的分布列为

Y_2	100	125	175	225	275
P	0.3	0.3	0.2	0.15	0.05

$EY_2=100\times0.3+125\times0.3+175\times0.2+225\times0.15+275\times0.05=150$ ………………………… 10 分

因为 $EY_1>EY_2$，所以建议新销售员应选择方案(a).……………………………………………… 12 分

21. 已知点 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点，$|F_1F_2|=4$，过点 F_1 的直线 l 交椭圆 C 于 A,B 两点，$\triangle ABF_2$ 的周长为 $8\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若点 P 的坐标为 $(-\frac{5}{2},0)$，判断 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 是否为定值，若是，求出这个定值；若不是，请说明理由.

解：(1)由题知，$2c=4$，$c=2$. 由椭圆的定义及 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $8\sqrt{2}$，得 $4a=8\sqrt{2}$，$\therefore a=2\sqrt{2}$，

$\therefore b^2=a^2-c^2=4$. $\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$； ………………………… 4 分

(2) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值，理由如下：

①当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=-2$，代入 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，得 $\begin{cases}x=-2\\y=\pm\sqrt{2}\end{cases}$

不妨设 $A(-2,\sqrt{2})$，$B(-2,-\sqrt{2})$，若 $P\left(-\frac{5}{2},0\right)$，

则 $\overrightarrow{PA}=\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$，$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-\frac{7}{4}$； ………………………… 6 分

②当直线 l 的斜率存在时，

设直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$，代入椭圆 C 的方程，可得 $(2k^2+1)x^2+8k^2x+8k^2-8=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{-8k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{8k^2-8}{2k^2+1}$， ………………………… 8 分

$\because\overrightarrow{PA}=(x_1+\frac{5}{2},y_1)$，$\overrightarrow{PB}=(x_2+\frac{5}{2},y_2)$，

$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(x_1+\frac{5}{2}\right)\left(x_2+\frac{5}{2}\right)+y_1y_2=\left(x_1+\frac{5}{2}\right)\left(x_2+\frac{5}{2}\right)+k^2[x_1x_2+2(x_1+x_2)+4]$

$=(k^2+1)\frac{8k^2-8}{2k^2+1}-\frac{8k^2\left(2k^2+\frac{5}{2}\right)}{2k^2+1}+4k^2+\frac{25}{4}=\frac{-\frac{7}{2}k^2-\frac{7}{4}}{2k^2+1}=-\frac{7}{4}$， ………………………… 11 分

综上所述，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值 $-\frac{7}{4}$. ………………………… 12 分

22. 已知函数 $f(x)=ax^2\ln x(a\neq0,a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $0<a<\mathrm{e}$，求证：$x\mathrm{e}^x>f(x)$.

解：(1) $f(x)=ax^2\ln x$，$f'(x)=ax(2\ln x+1)$，$x>0$. ………………………… 1 分

令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，$\therefore$ 当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},+\infty\right)$ 上单调递增； ………………………… 3 分

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},+\infty\right)$ 上单调递减； ………………………… 4 分

(2) $x\mathrm{e}^x>f(x)$ 等价于 $\mathrm{e}^x>ax\ln x$. 当 $x\in(0,1]$ 时，$\mathrm{e}^x>0$，$\ln x\leqslant0$，$0<a<\mathrm{e}$，不等式 $\mathrm{e}^x>ax\ln x$ 恒成立；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，令 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}-\ln x$，则 $g'(x)=\frac{\mathrm{e}^{x-1}(x-1)-x}{x^2}$， ………………………… 6 分

令 $h(x)=\mathrm{e}^{x-1}(x-1)-x$，则 $h'(x)=x\mathrm{e}^{x-1}-1$，令 $\varphi(x)=h'(x)=x\mathrm{e}^{x-1}-1$，则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{x-1}(x+1)$，

因为当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$ 单调递增，所以 $\varphi(x)>\varphi(1)=0$，所以 $h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

因为 $h(1)<0$，$h(2)>0$，所以存在 $x_0\in(1,2)$，使 $h(x_0)=0$，

即 $\frac{\mathrm{e}^{x_0-1}}{x_0}=\frac{1}{x_0-1}$，$x_0-1=\ln x_0-\ln(x_0-1)$，且 $x\in(1,x_0)$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{\mathrm{e}^{x_0-1}}{x_0}-\ln x_0=\frac{1}{x_0-1}-(x_0-1)-\ln(x_0-1)$.

令 $x_0-1=t$，则 $t\in(0,1)$，$\omega(t)=\frac{1}{t}-t-\ln t$，$t\in(0,1)$， ………………………… 10 分

因为 $\omega(t)$ 在 $t\in(0,1)$ 时单调递减，且 $\omega(1)=0$，所以 $t\in(0,1)$ 时，$\omega(t)>0$，即 $g(x)_{\min}>0$，所以 $g(x)>0$.

所以 $\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}>\ln x$，$\mathrm{e}^x>\mathrm{e}x\ln x$，又 $0<a<\mathrm{e}$，所以 $\mathrm{e}^x>ax\ln x$. 即 $x\mathrm{e}^x>f(x)$ 成立. ………………………… 12 分