

江苏省仪征中学 2020 届高三（上）期中复习专题——圆锥曲线中的最值与范围问题

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 评价_____

一、热身练习：

1、已知抛物线方程为 $y^2=4x$ ，直线 l 的方程为 $x-y+4=0$ ，在抛物线上有一动点 P 到 y 轴的距离为 d_1 ， P 到直线 l 的距离为 d_2 ，在 $d_1 + d_2$ 的最小值为_____。

2、已知 $A(4,0), B(2, 2)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 内的两个点， M 是椭圆上的动点，则 $|MA| + |MB|$ 的最大值为_____。 $5|MA| + 4|MB|$ 的最小值为_____。

3、已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点，点 P 在椭圆上运动，则 $\vec{PF}_1 \cdot \vec{PF}_2$ 的最大值是_____。

4、若点 O, F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的中心和左焦点，点 P 为椭圆上的任一点，则 $\vec{OP} \cdot \vec{FP}$ 的最大值为_____。

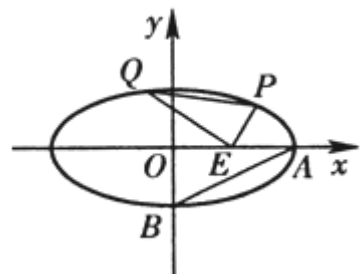
5、设 P 是椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 上一点， M, N 分别是两圆 $(x+2)^2 + y^2 = 1$ 和 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 上的点，则 $|PM| + |PN|$ 的最小值为_____。

二、典例研究：

例一、已知中心在原点 O ，焦点在 x 轴上的椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，点 A, B 分别是椭圆 C 的长轴、短轴的端点，点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 。

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)已知点 $E(3, 0)$ ，设点 P, Q 是椭圆 C 上的两个动点，满足 $EP \perp EQ$ ；求 $\vec{EP} \cdot \vec{QP}$ 的取值范围。

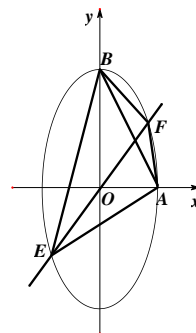


例二、已知椭圆 $C: x^2 + 2y^2 = 2$, F_1 、 F_2 分别是椭圆的左、右焦点, 直线 l 与椭圆交于 M 、 N 两点.

- (1) 求 $\triangle F_1MN$ 的周长的最大值;
- (2) 若直线 l 过点 F_2 , 求 $\overrightarrow{F_2M} \cdot \overrightarrow{F_2N}$ 的最小值和最大值.

例三、已知椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 以原点为圆心, 椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $x - y + \sqrt{2} = 0$ 相切. A 、 B 是椭圆 C 的右顶点与上顶点, 直线 $y = kx (k > 0)$ 与椭圆相交于 E 、 F 两点.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 当四边形 $AEBF$ 面积取最大值时, 求 k 的值.



三、巩固训练：

1、已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F , P 是双曲线 C 的左支上一点, $M(0,2)$, 则 $\triangle PFM$ 周长最小值为_____.

2、定点 $M(0,1)$, 动点 N, P 分别在抛物线 $x^2 = 4y$ 及椭圆 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$ 围成的封闭区域上运动, 且 $NP \parallel y$ 轴, 则 $\triangle MNP$ 的周长的取值范围是_____.

3、抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 点 (x, y) 为该抛物线上的动点, 又已知点 $A(-2,0)$, 则 $\frac{|PA|}{|PF|}$ 的取值范围是_____.

4、已知 A 为椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 上的动点, MN 为圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 的一条直径, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最大值为_____.

5、已知 P 点在圆 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ 上移动, Q 点在椭圆 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 上移动, 则 $|PQ|$ 的最大值是_____.

6、已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两焦点与短轴的一个端点的连线构成等腰直角三角形, 直线 $x + y + 1 = 0$ 与以椭圆 C 的右焦点为圆心, 以椭圆的长半轴长为半径的圆相切.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 设 P 为椭圆上一点, 若过点 $M(2,0)$ 的直线 l 与椭圆 E 相交于不同的两点 S 和 T , 且满足 $\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OT} = t\overrightarrow{OP}$ (O 为坐标原点), 求实数 t 的取值范围.

7、已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ 的离心率 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 且过点 $\left(1, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 相切的直线 l 交椭圆 C 与 A, B 两点, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值及取得最大值时直线 l 的方程.

