区县________ 学校________ 班级________ 姓名________ 学号________

密 封 线

2021届高三年级第一学期期中考试(四)

数　　学

(满分150分，考试时间120分钟)

2020．11

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、 单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合$A=\{x|-2\leqslant x<4\}$，$B=\{x|-5<x\leqslant 3\}$，则$A\cap B=$(　　)

A. $\{x|-5<x<4\}$　B. $\{x|-5<x\leqslant -2\}$

C. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$　D. $\{x|3\leqslant x<4\}$

2. “$a>1$”是“$(a-1)(a-2)<0$”的(　　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知变量x，y之间的一组数据如下表．若y关于x的线性回归方程为$\hat{y}=0.7x+\hat{a}$，则$\hat{a}=$(　　)

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	4.5

A. 0.1　B. 0.2

C. 0.35　D. 0.45

4. 已知a，b为不同直线，α，β为不同平面，则下列结论正确的是(　　)

A. 若$a\perp\alpha$，$b\perp a$，则$b\parallel\alpha$　B. 若a，$b\subset\alpha$，$a\parallel\beta$，$b\parallel\beta$，则$\alpha\parallel\beta$

C. 若$a\parallel\alpha$，$b\perp\beta$，$a\parallel b$，则$\alpha\perp\beta$　D. 若$\alpha\cap\beta=b$，$a\subset\alpha$，$a\perp b$，则$\alpha\perp\beta$

5. 高一某班有5名同学报名参加学校组织的三个不同社区服务小组，每个小组至多可接收该班2名同学，每名同学只能报一个小组，则报名方案有(　　)

A. 15种　B. 90种　C. 120种　D. 180种

6. 已知$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\tan\alpha=-3$，则$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$等于(　　)

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$　D. $\frac{3}{5}$

7. 随着科学技术的发展，放射性同位素技术已经广泛应用于医学、航天等众多领域，并取得了显著经济效益．假设某放射性同位素的衰变过程中，其含量N(单位：贝克)与时间t(单位：天)满足函数关系$P(t)=P_0 2^{-\frac{t}{30}}$，其中$P_0$为$t=0$时该放射性同位素的含量．已知$t=15$时，该放射性同位素的瞬时变化率为$-\frac{3\sqrt{2}\ln 2}{10}$，则该放射性同位素含量为4.5贝克时衰变所需时间为(　　)

A. 20天　B. 30天　C. 45天　D. 60天

8. 定义运算$\otimes$：① 对$\forall m\in\mathbf{R}$，$m\otimes 0=0\otimes m=m$；

② 对$\forall m,n,p\in\mathbf{R}$，$(m\otimes n)\otimes p=p\otimes(mn)+m\otimes p+n\otimes p$.

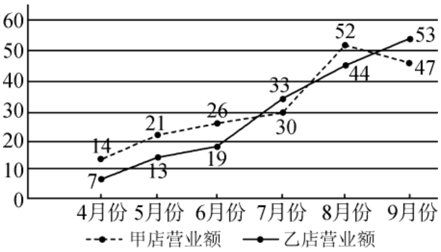
若$f(x)=e^{x-1}\otimes e^{1-x}$，则有(　　)

A. 函数 $y=f(x)$的图象关于 $x=1$ 对称　B. 函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

C. 函数 $f(x)$的最小值为 2　D. $f(2^{\frac{2}{3}})>f(2^{\frac{3}{2}})$

二、 多项选择题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 3 分，有选错的得 0 分．

9. 中国的华为公司是全球领先的 ICT(信息与通信)基础设施和智能终端提供商，其致力于把数字世界带给每个人、每个家庭、每个组织，构建万物互联的智能世界．其中华为的 5G 智能手机是全世界很多年轻人非常喜欢的品牌．为了研究某城市甲、乙两个华为 5G 智能手机专卖店的销售状况，统计了 2020 年 4 月到 9 月甲、乙两店每月的营业额(单位：万元)，得到如图的折线图，则下列说法正确的是(　　)



A. 根据甲店的营业额折线图可知，该店月营业额的平均值在[31，32]内

B. 根据乙店的营业额折线图可知，该店月营业额总体呈上升趋势

C. 根据甲、乙两店的营业额折线图可知，乙店的月营业额极差比甲店小

D. 根据甲、乙两店的营业额折线图可知，7，8，9 月份的总营业额甲店比乙店少

10. 若非零实数 x，y 满足 $x>y$，则下列判断正确的是(　　)

A. $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$　B. $x^3>y^3$　C. $(\frac{1}{2})^x>(\frac{1}{2})^y$　D. $\ln(x-y+1)>0$

11. 已知函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0，0<\varphi<\frac{\pi}{2})$的最小正周期为π，其图象的一条对称轴为 $x=\frac{5\pi}{12}$，则(　　)

A. $\phi=\frac{\pi}{3}$

B. 函数 $y=f(x)$的图象可由 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到

C. 函数 $f(x)$在$[0，\frac{\pi}{2}]$上的值域为$[-1，\frac{\sqrt{3}}{2}]$

D. 函数 $f(x)$在区间$[-\pi，-\frac{\pi}{2}]$上单调递减

12. 已知函数 $f(x)=$**错误!**其中 $a\in\mathbf{R}$.下列关于函数 $f(x)$的判断正确的是(　　)

A. 当 $a=2$ 时，$f(\frac{3}{2})=4$

B. 当$|a|<1$ 时，函数 $f(x)$的值域为$[-2，2]$

C. 当 $a=2$ 且 $x\in[n-1，n](n\in\mathbf{N}^*)$时，$f(x)=2^{n-1}\left(2-4\left|x-\frac{2n-1}{2}\right|\right)$

D. 当 $a>0$ 时，不等式 $f(x)\leqslant 2ax-\frac{1}{2}$在$[0，+\infty)$上恒成立

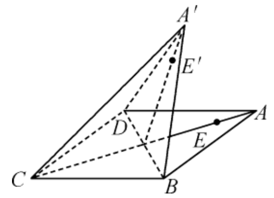
第Ⅱ卷(非选择题　共 90 分)

三、 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. $(x^2+\frac{2}{x})^5$的展开式中 x^4 的系数为________．

14. 若一直角三角形的面积为 50，则该直角三角形的斜边的最小值为________．

15. 已知 f(x)是定义在 **R** 上的奇函数，满足 f(1－x)＝f(1＋x)．若 f(1)＝1，则 f(1)＋f(2)＋f(3)＋…＋f(2 021)＝________．



16. 已知菱形 ABCD 边长为 3，∠BAD＝60°，点 E 为对角线 AC 上一点，AC＝6AE．将△ABD 沿 BD 翻折到△A′BD 的位置，E 记为 E′，且二面角 A′ BDC 的大小为 120°，则三棱锥 A′BCD 的外接球的半径为________；过 E′作平面 α 与该外接球相交，所得截面面积的最小值为________．

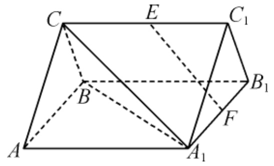
四、 解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. (本小题满分 10 分)

已知正三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 的底面边长为 2，点 E，F 分别为棱 CC_1 与 A_1B_1 的中点．

(1) 求证：直线 EF∥平面 A_1BC；

(2) 若该正三棱柱的体积为 $2\sqrt{6}$，求直线 EF 与平面 ABC 所成角的余弦值．



18. (本小题满分 12 分)

在① csin B＝bsin $\frac{A+B}{2}$,② cos B＝$\frac{\sqrt{21}}{7}$;③ bcos C＋csin B＝a 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中的横线处，并完成解答．

问题：△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，A＝$\frac{\pi}{3}$，点 D 是边 AB 上一点，AD＝5，CD＝7，且________，试判断 AD 和 DB 的大小关系．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+3bx+c$ 在 $x=0$ 处取得极大值 1.

(1) 求函数 $y=f(x)$的图象在 $x=1$ 处的切线的方程；

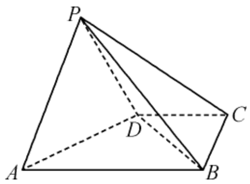
(2) 若函数 $f(x)$在$[t，t+2]$上不单调，求实数 t 的取值范围.

20.(本小题满分 12 分)

在四棱锥 PABCD 中，底面 ABCD 为直角梯形，CD∥AB，∠ABC＝90°，AB＝2BC＝2CD＝4，侧面 PAD⊥平面 ABCD，PA＝PD＝2.

(1) 求证：BD⊥PA；

(2) 已知平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l，在 l 上是否存在点 N，使二面角 PDCN 的余弦值为$\frac{1}{3}$？若存在，请确定点 N 位置；若不存在，请说明理由.



21. (本小题满分 12 分)

2020 年 10 月 16 日是第 40 个世界粮食日．中国工程院院士袁隆平海水稻团队迎来了海水稻的测产收割，其中宁夏石嘴山海水稻示范种植基地 YC801 测产，亩产超过 648.5 公斤，通过推广种植海水稻，实现亿亩荒滩变粮仓，大大提高了当地居民收入．某企业引进一条先进食品生产线，以海水稻为原料进行深加工，发明了一种新产品，若该产品的质量指标为 $m(m\in[70，100])$，其质量指标等级划分如下表：

质量指标值 m	[70，75)	[75，80)	[80，85)	[85，90)	[90，100]
质量指标等级	良好	优秀	良好	合格	废品

为了解该产品的经济效益并及时调整生产线，该企业先进行试生产．现从试生产的产品中随机抽取了 1 000 件，将其质量指标值 m 的数据作为样本，绘制如图所示的频率分布直方图：

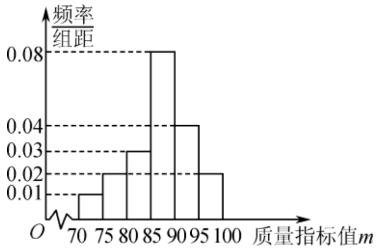
(1) 若将频率作为概率，从该产品中随机抽取 3 件产品，记“抽出的产品中至少有 1 件不是废品”为事件 A，求事件 A 发生的概率；

(2) 若从质量指标值 $m\geqslant 85$ 的样本中利用分层抽样的方法抽取 7 件产品，然后从这 7 件产品中任取 3 件产品，求质量指标值 $m\in[90，95)$的件数 X 的分布列及数学期望；

(3) 若每件产品的质量指标值 m 与利润 y(单位：元)的关系如下表($1<t<4$)：

质量指标值 m	[70，75)	[75，80)	[80，85)	[85，90)	[90，100]
利润 y(元)	6t	8t	4t	2t	$-\frac{5}{3}e^t$

试分析生产该产品能否盈利？若不能，请说明理由；若能，试确定 t 为何值时，每件产品的平均利润达到最大(参考数值：ln 2≈0.7，ln 5≈1.6)．



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=xe^{x}-a(\ln x+x)$.

(1) 当 $a>0$ 时，求 $f(x)$的最小值；

(2) 若对任意 $x>0$ 恒有不等式 $f(x)\geqslant 1$ 成立.

① 求实数 a 的值；

② 求证：$x^{2}e^{x}>(x+2)\ln x+2\sin x$.

线

封

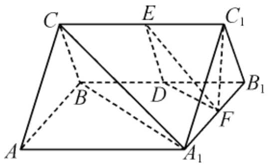
密

2021 届高三年级第一学期期中考试(四)(潍坊)

数学参考答案及评分标准

1. C　2. B　3. C　4. C　5. B　6. B　7. D　8. A　9. ABD　10. BD　11. BC　12. ACD

13. 40　14. $10\sqrt{2}$　15. 1　16. $\frac{\sqrt{21}}{2}$　$\frac{9}{4}\pi$(第一空 2 分，第二空 3 分)



17. (1) **证明**：取 BB_1 中点 D，连接 ED，FD，(1 分)

在平行四边形 BCC_1B_1 中，点 E 为 CC_1 的中点，点 D 为 BB_1 的中点，

所以 $ED\parallel CB$.

在$\triangle B_1BA_1$ 中，点 F 为 A_1B_1 的中点，点 D 为 BB_1 的中点，

所以 $FD\parallel A_1B$.(3 分)

又 ED，FD$\subset$平面 EFD，$ED\cap FD=D$，所以平面 EFD$\parallel$平面 A_1BC.

又 EF$\subset$平面 EFD，所以 EF$\parallel$平面 A_1BC.(5 分)

(2) **解**：设 $AA_1=h$，$V_{ABCA_1B_1C_1}=S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4h$，

所以$\sqrt{3}h=2\sqrt{6}$，即 $h=2\sqrt{2}$.(6 分)

因为平面 ABC$\parallel$平面 $A_1B_1C_1$，

所以 EF 与平面 ABC 所成的角即为 EF 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的角.

因为 $CC_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$，

所以 EF 在平面 $A_1B_1C_1$ 上的射影为 C_1F，

所以$\angle EFC_1$ 为 EF 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的角．(8 分)

因为 $EC_1=\sqrt{2}$，$FC_1=\sqrt{3}$，所以 $EF=\sqrt{5}$，

所以 $\cos\angle EFC_1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，即 EF 与平面 ABC 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$.(10 分)

18. **解**：设 $AC=x$，在$\triangle ACD$ 中，由余弦定理可得 $49=x^2+25-2\cdot x\cdot 5\cdot\cos\frac{\pi}{3}$，(2 分)

即 $x^2-5x-24=0$，解得 $x=8$ 或 $x=-3$(舍去)，所以 $AC=8$.(3 分)

选择条件①：

由正弦定理得 $\sin C\sin B=\sin B\sin\frac{A+B}{2}$.(4 分)

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq 0$，所以 $\sin C=\sin\frac{A+B}{2}$.(5 分)

因为 $A+B=\pi-C$，所以 $\sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{C}{2}$.(6 分)

因为 $C\in(0,\pi)$，所以$\frac{C}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\cos\frac{C}{2}\neq 0$，

所以 $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$，即$\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$，$C=\frac{\pi}{3}$.(10 分)

又 A＝$\frac{\pi}{3}$，所以△ABC 是等边三角形，所以 AB＝8，(11 分)
所以 DB＝3，故 AD＞DB.(12 分)
选择条件②：
由 $\cos B=\frac{\sqrt{21}}{7}$，得 $\sin B=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.(5 分)
因为 A＋B＋C＝π，
所以 sin C＝sin(A＋B)＝sin Acos B＋cos Asin B
$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$.(8 分)
在△ABC 中，由正弦定理得$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，即$\frac{AB}{\frac{5\sqrt{7}}{14}}=\frac{8}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}$，(10 分)
解得 AB＝10.(11 分)
又 AD＝5，故 AD＝DB.(12 分)
选择条件③：
因为 bcos C＋csin B＝a，由正弦定理得 sin Bcos C＋sin Csin B＝sin A．(4 分)
因为 A＋B＋C＝π，所以 sin Bcos C＋sin Csin B＝sin(B＋C)＝sin Bcos C＋sin Ccos B，
所以 sin Csin B＝sin Ccos B.
因为 sin C≠0，所以 sin B＝cos B．(7 分)
因为 B∈(0，π)，故 B＝$\frac{\pi}{4}$，
所以∠ACB＝$\frac{5\pi}{12}$.(8 分)
在△ABC 中，由正弦定理得$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，即$\frac{AB}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，(10 分)
解得 AB＝$4(\sqrt{3}+1)$＞10.(11 分)
因为 AD＝5，所以 AD＜DB.(12 分)
19. **解**：(1) 因为 $f'(x)=3x^2-6x+3b$，(1 分)
由题意可得**错误!**解得 b＝0，c＝1，(3 分)
所以 $f(x)=x^3-3x^2+1$；
经检验，适合题意.
又 f(1)＝－1，f′(1)＝－3，(5 分)
所以函数 y＝f(x)图象在 x＝1 处的切线的方程为 y－(－1)＝－3(x－1)，
即 3x＋y－2＝0.(6 分)
(2) 因为 $f'(x)=3x^2-6x$，
令 $3x^2-6x=0$，得 x＝0 或 x＝2.(8 分)
当 x＜0 时，f′(x)＞0，函数 f(x)为增函数；
当 0＜x＜2 时，f′(x)＜0，函数 f(x)为减函数；
当 x＞2 时，f′(x)＞0，函数 f(x)为增函数．(9 分)
因为函数 f(x)在[t，t＋2]上不单调，
所以 t＜0＜t＋2 或 t＜2＜t＋2，(11 分)
所以－2＜t＜0 或 0＜t＜2.(12 分)

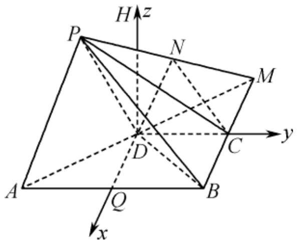
20. (1) **证明**：连接 BD，$BD=\sqrt{CD^2+CB^2}=2\sqrt{2}$，$AD=2\sqrt{2}$，

所以 $BD^2+AD^2=AB^2$，所以 $AD\perp BD$.(2 分)

因为平面 PAD⊥平面 ABCD，平面 PAD∩平面 ABCD＝AD，BD⊂平面 ABCD，

所以 BD⊥平面 PAD.

因为 PA⊂平面 PAD，所以 BD⊥PA.(4 分)



(2) **解**：延长 AD，BC 相交于点 M，连接 PM，

因为 M∈平面 PAD，M∈平面 PBC，所以 M∈l.

又 P∈l，所以 PM 即为交线 l.(5 分)

取 AB 中点 Q，连 DQ，则 DQ⊥DC，

过 D 在平面 PAD 内作 AD 的垂线 DH，则 DH⊥平面 ABCD.

分别以 DQ，DC，DH 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，(6 分)

则 $P(1,-1,\sqrt{2})$，$C(0,2,0)$，$M(-2,2,0)$，$D(0,0,0)$，

所以$\overrightarrow{DP}=(1,-1,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$.

设平面 PDC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0$，

所以**错误!**取 $\boldsymbol{m}=($－**错误!**，$0,1)$．(8 分)

设 $N(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{PN}=\lambda\overrightarrow{PM}$，

则$(x_1-1,y_1+1,z_1-\sqrt{2})=\lambda(-3,3,-2\sqrt{2})$，

所以 $x_1=1-3\lambda$，$y_1=-1+3\lambda$，$z_1=\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda$，

$\overrightarrow{PN}=(1-3\lambda,-1+3\lambda,\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda)$，$\overrightarrow{DC}=(0,-2,0)$.

设平面 NDC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，

所以**错误!**取 $\boldsymbol{n}=($**错误!**－**错误!**$\lambda,0,3\lambda-1)$，(10 分)

所以$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|(-\sqrt{2})\times\sqrt{2}\times(1-\lambda)+3\lambda-1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2(1-\lambda)^2+(3\lambda-1)^2}}=\dfrac{1}{3}$,

所以 $8\lambda^2-10\lambda+3=0$，

所以 $\lambda=\dfrac{1}{2}$或 $\lambda=\dfrac{3}{4}$，经检验 $\lambda=\dfrac{3}{4}$时，不合题意，舍去.

所以存在点 N，点 N 为 PM 的中点．(12 分)

21. **解**：(1) 设事件 A 的概率为 P(A)，则由频率分布直方图，可得 1 件产品为废品的概率为 $P=(0.04+0.02)\times5=0.3$，则 $P(A)=1-C_3^3(0.3)^3=1-0.027=0.973$.(2 分)

(2) 由频率分布直方图可知，质量指标值大于或等于 85 的产品中，

$m\in[85,90)$的频率为 $0.08\times5=0.4$;

$m\in[90,95)$的频率为 $0.04\times5=0.2$；

$m\in[95,100]$的频率为 $0.02\times5=0.1$.

故利用分层抽样抽取的 7 件产品中，$m\in[85,90)$的有 4 件，$m\in[90,95)$的有 2 件，$m\in[95,100]$的有 1 件．(4 分)

从这 7 件产品中任取 3 件产品，质量指标值 $m\in[90,95)$的件数 X 的所有可能取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_5^2}{C_7^3}=\frac{4}{7}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2C_5^1}{C_7^3}=\frac{1}{7}$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

(7 分)

所以 $E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$.(8 分)

(3) 由频率分布直方图可得该产品的质量指标值 m 与利润 y(元)的关系如下表所示($1<t<4$)：

质量指标值 m	[70，75)	[75，80)	[80，85)	[85，90)	[90，100]
利润 y	6t	8t	4t	2t	$-\frac{5}{3}e^t$
P	0.05	0.1	0.15	0.4	0.3

故每件产品的利润 $y=0.3t+0.8t+0.6t+0.8t-0.5e^t=2.5t-0.5e^t(1<t<4)$．(10 分)

则 $y'=2.5-0.5e^t$，令 $y'=2.5-0.5e^t=0$，得 $t=\ln 5$，

故当 $t\in(1,\ln 5)$时，$y'>0$，函数 $y=2.5t-0.5e^t$ 单调递增；

当 $t\in(\ln 5,4)$时，$y'<0$，函数 $y=2.5t-0.5e^t$ 单调递减.

所以当 $t=\ln 5$ 时，y 取得最大值，为 $2.5\times\ln 5-0.5e^{\ln 5}=1.5$.

所以生产该产品能够盈利，当 $t=\ln 5\approx1.6$ 时，每件产品的利润取得最大值 1.5 元．(12 分)

22. (1) 解：(解法 1)f(x)的定义域为$(0,+\infty)$．(1 分)

由题意 $f'(x)=(x+1)(e^x-\frac{a}{x})=(x+1)\frac{xe^x-a}{x}$，

令 $xe^x-a=0$，得 $a=xe^x$，

令 $g(x)=xe^x$，$g'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x>0$，

所以 g(x)在 $x\in(0,+\infty)$上为增函数，且 $g(0)=0$，

所以 $a=xe^x$ 有唯一实根，即 $f'(x)=0$ 有唯一实根，设为 x_0，即 $a=x_0ex_0$，(3 分)

所以 f(x)在$(0,x_0)$上为减函数，在$(x_0,+\infty)$上为增函数，

所以 $f(x)_{min}=f(x_0)=x_0ex_0-a(\ln x_0+x_0)=a-a\ln a$．(5 分)

(解法 2)$f(x)=xe^x-a(\ln x+x)=e^{\ln x+x}-a(\ln x+x)(x>0)$.

设 $t=\ln x+x$，则 $t\in\mathbf{R}$.

记 $\varphi(t)=e^t-at(t\in\mathbf{R})$，故 f(x)最小值即为 $\varphi(t)$最小值．(3 分)

$\phi'(t)=e^t-a(a>0)$，

当 $t\in(-\infty，\ln a)$时，$\phi'(t)<0$，$\phi(t)$单调递减，
当 $t\in(\ln a，+\infty)$时，$\phi'(t)>0$，$\phi(t)$单调递增，
所以 $f(x)_{min}=\varphi(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a=a-a\ln a$，
所以 $f(x)$的最小值为 $a-a\ln a$．(5 分)
(2) ① **解：**当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$单调递增，$f(x)$值域为 $\mathbf{R}$，不适合题意；(6 分)
当 $a>0$ 时，由(1)可知 $f(x)_{min}=a-a\ln a$.
设 $\varphi(a)=a-a\ln a(a>0)$，所以 $\varphi'(a)=-\ln a$，
当 $a\in(0，1)$时，$\phi'(a)>0$，$\phi(a)$单调递增，
当 $a\in(1，+\infty)$时，$\phi'(a)<0$，$\phi(a)$单调递减，
所以 $\varphi(a)_{max}=\varphi(1)=1$，即 $a-a\ln a\leqslant 1$.(7 分)
由已知 $f(x)\geqslant 1$ 恒成立，所以 $a-a\ln a\geqslant 1$，
所以 $a-a\ln a=1$，
所以 $a=1$.(8 分)
② **证明：**由①可知 $xe^x-\ln x-x\geqslant 1$，因此只需证 $x^2+x>2\ln x+2\sin x$.
因为 $\ln x\leqslant x-1$，只需证 $x^2+x>2x-2+2\sin x$，即 $x^2-x+2>2\sin x$．(10 分)
当 $x>1$ 时，$x^2-x+2>2\geqslant 2\sin x$，结论成立；
当 $x\in(0，1]$时，设 $g(x)=x^2-x+2-2\sin x$，
$g'(x)=2x-1-2\cos x$，
当 $x\in(0，1]$时，$g'(x)$显然单调递增.
$g'(x)\leqslant g'(1)=1-2\cos 1<0$，故 $g(x)$单调递减，
$g(x)\geqslant g(1)=2-2\sin 1>0$，即 $x^2-x+2>2\sin x$.
综上，结论成立．(12 分)