江苏省仪征中学 2020 届高三上学期数学周末自助餐(1)

班级_____________学号_________ 姓名______________ 成绩____________.

一、填空题：

1.设全集 $U=\{x\mid x\geq 2，x\in \mathbf{N}\}$，集合 $A=\{x\mid x^2\geq 5，x\in \mathbf{N}\}$，则 $\complement_U A=$____________.

2.函数 $f(x)=\log_2(-x^2+2\sqrt{2})$ 的值域为__________________________.

3.定义在区间 $[0,3\pi]$ 上的函数 $y=\sin 2x$ 的图象与 $y=\cos x$ 的图象的交点个数是____________.

4.在 ΔABC 中，$a=5，b=8，C=60°$，则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$ 的值为____________________.

5.函数 $y=a\sin(ax+\theta)(a>0，\theta\neq 0)$图象上的一个最高点和其相邻最低点的距离的最小值为________.

6.在锐角三角形 ABC 中，$BC=1$，$B=2A$，则 AC 的取值范围是______________.

7. 若动点 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$分别在直线 l_1：$x-y-5=0$，l_2：$x-y-15=0$ 上移动，则 P_1P_2 的中点 P 到原点的距离的最小值是________.

8. 如果定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足：对于任意 $x_1\neq x_2$，都有 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，则称 $f(x)$为“H 函数”．给出下列函数：①$y=x+1$；②$y=x^2+1$；③$y=e^x+1$；④$y=\begin{cases}\ln|x|，x\neq 0，\\ 0，x=0，\end{cases}$ 其中“H 函数”的序号是________.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l：$3x-4y+5=0$ 与圆 C：$x^2+y^2-10x=0$ 交于 A，B 两点，P 为 x 轴上一动点，则△ABP 周长的最小值为________.

10.已知 $f(x)$ 是定义在 R 上且周期为 3 的函数，当 $x\in[0,3)$ 时 $f(x)=|x^2-2x+\dfrac{1}{2}|$，$y=f(x)-a$ 在区间 $[-3,4]$ 上有 10 个零点（互不相同），则实数 a 的取值范围是_________.

二、解答题：

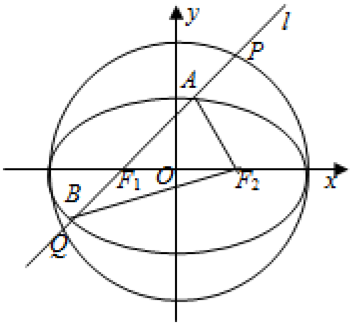
11. 在△ABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-16$．求：

（1）AB 的值；　　（2）$\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$ 的值．

12. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 和圆 O：$x^2+y^2=a^2$，$F_1\left(-1,0\right),F_2\left(1,0\right)$ 分别是椭圆的左、右两焦点，过 F_1 且倾斜角为 α $\left(\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 的动直线 l 交椭圆 C 于 A,B 两点，交圆 O 于 P,Q 两点（如图所示，点 A 在 x 轴上方）．当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时，弦 PQ 的长为 $\sqrt{14}$．

（1）求圆 O 与椭圆 C 的方程；

（2）若点 M 是椭圆 C 上一点，求当 AF_2,BF_2,AB 成等差数列时，ΔMPQ 面积的最大值.



参考答案：

1. $\{2\}$；2. $(-\infty,\dfrac{3}{2}]$；

3.【提示】由 $\sin 2x=\cos x \Rightarrow \cos x=0$ 或 $\sin x=\dfrac{1}{2}$，

$\because x\in[0,3\pi]$，$\therefore x=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{13\pi}{6},\dfrac{17\pi}{6}$，共 7 个.

4.【提示】由题意可知 $\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\rangle=120°$，故 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\rangle=5\times 8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-20$.

5.【提示】取函数 $y=a\sin(ax+\theta)(a>0，\theta\neq 0)$ 的最大值为 a，周期为 $T=\dfrac{2\pi}{a}$，所以同一周期内相邻的最高点与最低点的距离为：$\sqrt{\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2+4a^2}\geq\sqrt{2\sqrt{\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2\times 4a^2}}=2\sqrt{\pi}$（当且仅当 $a=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ 时，等号成立），故答案为 $2\sqrt{\pi}$.

6.【提示】 由正弦定理得 $AC=\dfrac{BC}{\sin A}\sin B=2\cos A$．而 $\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2},\\ 0<2A<\dfrac{\pi}{2},\\ 0<\pi-A-2A<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$

所以 $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{4}$，从而 $AC\in\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

7.【提示】由题意得 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程是 $x-y-10=0$，则原点到直线 $x-y-10=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|-10|}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$，即点 P 到原点距离的最小值为 $5\sqrt{2}$.

8.【提示】$\because x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，$\therefore (x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$，$\therefore x_1-x_2$，$f(x_1)-f(x_2)$ 同号，即函数 $f(x)$ 是单调递增函数，①$y=x+1$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，满足条件；②$y=x^2+1$ 在 $(-\infty,0)$ 上，函数单调递减，不满足条件；③$y=e^x+1$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，满足条件；④$y=\begin{cases}\ln|x|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 当 $x>0$ 时，函数单调递增，当 $x<0$ 时，函数单调递减，不满足条件，综上满足“H 函数”条件的函数为①③，故答案为①③.

9. 【提示】设直线 l 与圆 C 的一个交点 $B(5，5)$ 关于 x 轴的对称点为 B'，易知 BB' 恰为圆 C 的直径，

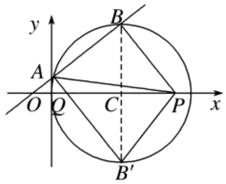
记 AB' 与 x 轴交于点 Q，则 $PA+PB=PA+PB'\geq AB'$，所以△ABP 的周长的最小值为 $AB+AB'$，

又由点到直线的距离公式可得，圆心到直线 $3x-4y+5=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|3\times 5+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4$，

所以由圆的弦长公式可得，$AB=2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{5^2-4^2}=6$，

又在 Rt△ABB' 中，$AB=6$，$BB'=10$，所以 $AB'=\sqrt{BB'^2-AB^2}=8$，

所以△ABP 的周长的最小值为 14.



10.【提示】根据题目条件，数形结合，即转化为通过找 $y=f(x)$ 与

$y=a$ 的图象交点去推出零点，先画出 0,3]上 $y=x^2-2x+\frac{1}{2}$ 的图像，再将 x 轴下方的图象翻折到上方，利用周期为 3，将图象复制粘贴至$[-3,4]$，发现若 $f(x)$ 图象要与 $y=a$ 有 10 个不同的交点，则 $a\in(0,\frac{1}{2})$.

11.【解】（1）（方法 1）因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-16$， ……………………………… 4 分

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=9+16=25$，即 $\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=25$，亦即 $\overrightarrow{AB}^2=25$，故 $AB=5$． … 7 分

（方法 2）设 A，B，C 的对边依次为 a，b，c，则由条件得 $bc\cos A=9$，$ac\cos B=16$． …… 3 分

两式相加得 $c(b\cos A+a\cos B)=9+16=25$，即 $c^2=25$，故 $AB=c=5$． ……………… 7 分

（方法 3）设 A，B，C 的对边依次为 a，b，c，则由条件得 $bc\cos A=9$，$ac\cos B=16$． …… 3 分

由余弦定理得 $\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)=9$，$\frac{1}{2}\left(c^2+a^2-b^2\right)=16$，两式相加得 $c^2=25$，故 $AB=c=5$． … 7 分

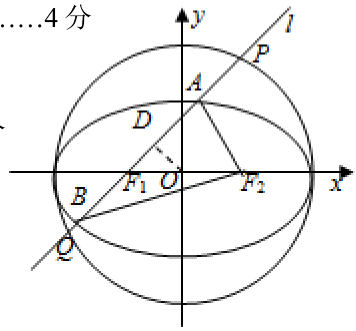
（2）$\frac{\sin(A-B)}{\sin C}=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin C}$ ……………………… 10 分

由正弦定理得 $\frac{\sin(A-B)}{\sin C}=\frac{a\cos B-b\cos A}{c}=\frac{ac\cos B-bc\cos A}{c^2}=\frac{16-9}{c^2}=\frac{7}{25}$． ………… 14 分

12. 解：（1）取 PQ 的中点 D，连 OD，OP，由 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，$c=1$，知 $OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\because PQ=\sqrt{14}\therefore OQ^2=\frac{PQ^2}{4}+OD^2=4$，$\therefore a^2=4,b^2=3$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$\odot O:x^2+y^2=4$， ……4 分



（2）设 $AF_2=s,BF_2=t$，

$\because AF_1+AF_2=2a=4,BF_1+BF_2=2a=4$， ………6 分

$\because AF_2,BF_2,AB$ 的长成等差数列，

$\therefore 2t=s+8-s-t\therefore t=\frac{8}{3}$

设 $B(x_0,y_0)$，由 $\begin{cases}(x_0-1)^2+{y_0}^2=\frac{64}{9}\\ \frac{{x_0}^2}{4}+\frac{{y_0}^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $B(-\frac{4}{3},-\frac{\sqrt{15}}{3})$， ………………10 分

$\therefore k=\sqrt{15}$，$\therefore PQ:y=\sqrt{15}(x+1)$，$\therefore PQ=\frac{7}{2}$. ………………12 分

易求得椭圆上一点到直线 PQ 的距离的最大值是 $\frac{3\sqrt{7}+\sqrt{15}}{4}$，所以 ΔMPQ 的面积的最大值是 $\frac{21\sqrt{7}+7\sqrt{15}}{16}$. ……………15 分