

仪征中学高一数学小练 16

一、选择题（本大题共 3 小题，共 15.0 分）

1. 设集合 $A=\{x|x^2-4x+3<0\}$, $B=\{x|2x-3>0\}$, 则 $A\cap B=$ ()
- A. $(-3, -\frac{3}{2})$ B. $(-3, \frac{3}{2})$ C. $(1, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, 3)$
2. 在下列区间中, 函数 $f(x) = e^x + 4x - 3$ 的零点所在的区间为()
- A. $(-2, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$
3. 函数 $f(x) = \frac{2mx-3}{\sqrt{mx^2+mx+1}}$ 的定义域为 R , 则实数 m 的取值范围是
- A. $(0, 4)$ B. $[0, 4)$ C. $[0, 4]$ D. $(0, 4]$

二、填空题（本大题共 5 小题，共 25.0 分）

4. 若幂函数 $y = (m^2 - 4m + 1)x^{m^2 - 2m - 3}$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 则实数 m 的值等于_____.
5. 若 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_1(2x+1)}}$, 则 $f(x)$ 的定义域为_____.
6. 设函数 $f(x)$ 是偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} x(3-x), & 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{3}{x} + 1, & x > 3 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - m$ 有四个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是_____.
7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x + 4a, & x > 3 \\ 2x + a^2, & x \leq 3 \end{cases}$, 其中 $a > 0$, 若 $f(x)$ 的值域为 R , 则实数 a 的取值范围是_____.
8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数, 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = 2^x - 1$, 函数 $g(x) = x^2 - 2x + m$. 如果对于 $\forall x_1 \in [-2, 2], \exists x_2 \in [-2, 2]$, 使得 $g(x_2) = f(x_1)$, 则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题（本大题共 3 小题，共 36.0 分）

9. 计算:

$$(1) \sqrt[4]{(3-\pi)^4} + (0.008)^{\frac{1}{3}} - (0.25)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$$

$$(2) (\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3})^6 + (\sqrt{2\sqrt{2}})^{\frac{4}{3}} - 4 \left(\frac{16}{49}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} \sqrt[4]{2} \times 8^{0.25} - (-2009)^0.$$

10. 已知定义域为 R 的函数 $f(x) = \frac{-2^x + b}{2^{x+1} + a}$ 是奇函数.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 若对任意的 $t \in R$, 不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

11. 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1-ax}{x-1}$ 的图象关于原点对称, 其中 a 为常数.

(1) 求 a 的值;

(2) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) < m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(3) 若关于 x 的方程 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 在 $[2, 3]$ 上有解, 求 k 的取值范围.

答案和解析

1. 【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查的知识点是集合的交集及其运算，难度不大，属于基础题.

解不等式求出集合 A, B, 结合交集的定义, 可得答案.

【解答】

解: ∵ 集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\} = (1, 3)$,

$B = \{x | 2x - 3 > 0\} = (\frac{3}{2}, +\infty)$,

∴ $A \cap B = (\frac{3}{2}, 3)$,

故选: D

2. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题考察了函数零点的判断方法, 借助函数的单调性, 函数值, 属于中档

题. 根据函数的单调性函数 $f(x) = e^x + 4x - 3$ 单调递增, 运用零点判定定理, 判定

区间.

【解答】

解: ∵ 函数 $f(x) = e^x + 4x - 3$,

∴ 函数在 $\mathbb{R}$ 上为增函数,

又: $f(0) = e^0 - 3 = -2 < 0$,

$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} + 2 - 3 = \sqrt{e} - 1 = e^{\frac{1}{2}} - e^0 > 0$,

∴ $f(0) \cdot f(\frac{1}{2}) < 0$,

∴ 函数 $f(x) = e^x + 4x - 3$ 的零点所在的区间为 $(0, \frac{1}{2})$

故选 C.

3. 【答案】B

【解析】

【分析】

本题主要考查了对数函数的定义域,考查了含有参数的不等式恒成立问题,

由于含有参数需要进行分类讨论,属于中档题本题易忘记讨论 $m=0$ 的情况导致漏解.

【解答】

解: $\because$ 函数 $f(x) = \frac{2mx-3}{\sqrt{mx^2+mx+1}}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$,

$\therefore mx^2+mx+1 > 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立,

① 当 $m=0$ 时, 有 $1 > 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立, 故符合条件;

② 当 $m \neq 0$ 时, 由 $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 4m < 0 \end{cases}$, 解得 $0 < m < 4$,

综上, 实数 m 的取值范围是 $[0, 4)$.

故选 B.

4. 【答案】 4

【解析】

【分析】

由函数 y 的幂函数得 $m^2-4m+1=1$, 求出 m 的值, 再由幂函数 y 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数求出满足条件的 m 值. 本题考查了幂函数的定义与性质的应用问题, 是基础题.

【解答】

解: 由幂函数 $y = (m^2-4m+1)x^{m^2-2m-3}$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数,

可得 $m^2-4m+1=1$, 解得 $m=4$ 或 0 ;

又幂函数 $y = x^{m^2-2m-3}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

$\therefore m^2-2m-3 > 0$,

$\therefore m=4$ 时满足条件.

故答案为: 4.

5. 【答案】 $(-\frac{1}{2}, 0)$

【解析】

解: 要使原函数有意义, 则 $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) > 0$,

即 $0 < 2x+1 < 1$, 所以 $-\frac{1}{2} < x < 0$,

所以原函数的定义域为 $(-\frac{1}{2}, 0)$.

故答案为 $(-\frac{1}{2}, 0)$.

无理式被开方数大于等于0, 分式分母不等于0, 对数的真数大于0, 解答即可.

本题考查对数函数的定义域, 考查学生发现问题解决问题的能力, 是基础题.

6. 【答案】 $[1, \frac{9}{4})$

【解析】

解: 由 $0 \leq x \leq 3$ 可得 $f(x) \in [0, \frac{9}{4}]$,

$x > 3$ 时, $f(x) \in (0, 1)$.

画出函数 $y=f(x)$ 与 $y=m$ 的图象, 如图

所示,

$\therefore$ 函数 $y=f(x)-m$ 有四个不同的零点,

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 与 $y=m$ 的图象有 4 个交点,

由图象可得 m 的取值范围为 $[1, \frac{9}{4})$,

故答案为: $[1, \frac{9}{4})$.

画出函数 $y=f(x)$ 与 $y=m$ 的图象, 由图象可得 m 的取值范围.

本题考查了函数的奇偶性的应用, 以及零点的判断及分段函数的应用, 考查

数形结合思想方法, 属于中档题.

7. 【答案】 $[7, +\infty)$

【解析】

解: 函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x + 4a, & x > 3 \\ 2x + a^2, & x \leq 3 \end{cases}$, 其中 $a > 0$,

令 $y_1 = 3^x + 4a$, ($x > 3$) 是增函数, 其值域 $y_1 > 27 + 4a$,

$y_2 = 2x + a^2$ ($x \leq 3$) 也是增函数, 其值域 $y_2 \leq 6 + a^2$.

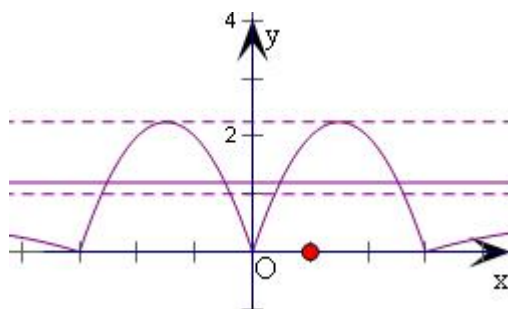
要使 $f(x)$ 的值域为 R , 只需 $6 + a^2 \geq 27 + 4a$

解得: $a \geq 7$ 或 $a \leq -3$.

$\therefore a > 0$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[7, +\infty)$

故答案为: $[7, +\infty)$.



根据指数函数性质可知 $y=3^x+4a$, ($x>3$) 是增函数, 其值域 $y>27+4a$,

$y=2x+a^2$ ($x\leq 3$) 也是增函数, 其值域 $y\leq 6+a^2$. 要使 $f(x)$ 的值域为 R , 只需

$6+a^2\geq 27+4a$ 即可, 从而可得实数 a 的取值范围.

本题考查了分段函数值域的问题, 抓住分段函数中的各段函数的单调性, 求出值域是关键. 属于中档题.

8. 【答案】 $[-5, -2]$

【解析】

解: $\because f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数, $\therefore f(0)=0$,

当 $x\in(0, 2]$ 时, $f(x)=2^x-1\in(0, 3]$,

则当 $x\in[-2, 2]$ 时, $f(x)\in[-3, 3]$,

若对于 $\forall x_1\in[-2, 2], \exists x_2\in[-2, 2]$, 使得 $g(x_2)=f(x_1)$,

则等价于 $g(x)_{\max}\geq 3$ 且 $g(x)_{\min}\leq -3$,

$\because g(x)=x^2-2x+m=(x-1)^2+m-1, x\in[-2, 2]$,

$\therefore g(x)_{\max}=g(-2)=8+m, g(x)_{\min}=g(1)=m-1$,

则满足 $8+m\geq 3$ 且 $m-1\leq -3$,

解得 $m\geq -5$ 且 $m\leq -2$,

故 $-5\leq m\leq -2$,

故答案为: $[-5, -2]$

求出函数 $f(x)$ 的值域, 根据条件, 确定两个函数的最值之间的关系即可得到结论.

本题主要考查函数奇偶性的应用, 以及函数最值之间的关系, 综合性较强.

9. 【答案】 解: (1) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}+(0.008)^{\frac{1}{3}}-(0.25)^{\frac{1}{2}}\times(\frac{1}{\sqrt{2}})^{-4}$

$=\pi-3+0.2-0.5\times 4$

$=\pi-3+0.2-2$

$=\pi-4.8$.

(2) $(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6+(\sqrt{2\sqrt{2}})^{\frac{4}{3}}-4(\frac{16}{49})^{-\frac{1}{2}}-\sqrt[4]{2}\times 8^{0.25}-(-2009)^0$

$=4\times 27+(2^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}-7-16^{\frac{1}{4}}-1$

$=108+2-7-2-1$

=100.

【解析】

本题考查指数式化简求值,是基础题,解题时要认真审题,注意有理数指数幂的性质、运算法则的合理运用.

(1)利用有理数指数幂的性质、运算法则求解.

(2)利用有理数指数幂的性质、运算法则求解.

10.【答案】解: (I) 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(0)=0$,

$$\text{即 } \frac{b-1}{a+2} = 0 \Rightarrow b=1 \therefore f(x) = \frac{1-2^x}{a+2^{x+1}}$$

$$\text{又由 } f(1) = -f(-1) \text{ 知 } \frac{1-2}{a+4} = -\frac{1-\frac{1}{2}}{a+1} \Rightarrow a=2.$$

所以 $a=2, b=1$.

经检验 $a=2, b=1$ 时, $f(x) = \frac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}$ 是奇函数.

$$(II) \text{ 由 (I) 知 } f(x) = \frac{1-2^x}{2+2^{x+1}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{x+1}},$$

易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为减函数.

又因为 $f(x)$ 是奇函数,

$$\text{所以 } f(t^2-2t) + f(2t^2-k) < 0$$

$$\text{等价于 } f(t^2-2t) < -f(2t^2-k) = f(k-2t^2),$$

因为 $f(x)$ 为减函数, 由上式可得: $t^2-2t > k-2t^2$.

即对一切 $t \in \mathbb{R}$ 有: $3t^2-2t-k > 0$,

$$\text{从而判别式 } \Delta = 4 + 12k < 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{3}.$$

所以 k 的取值范围是 $k < -\frac{1}{3}$.

【解析】

(I) 利用奇函数定义, 在 $f(-x) = -f(x)$ 中的运用特殊值求 a, b 的值;

(II) 首先确定函数 $f(x)$ 的单调性, 然后结合奇函数的性质把不等式 $f(t^2-2t) + f$

$(2t^2-k) < 0$ 转化为关于 t 的一元二次不等式, 最后由一元二次不等式知识求出

k 的取值范围.

本题主要考查函数奇偶性与单调性的综合应用;同时考查一元二次不等式恒成立问题的解决策略.

11.【答案】解: (1) $\because$ 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x),$$

$$\text{即 } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1+ax}{x-1} = -\log_{\frac{1}{2}} \frac{1-ax}{x-1} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{1-ax},$$

解得: $a=-1$ 或 $a=1$ (舍);

$$(2) f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1),$$

$x>1$ 时, $\log_{\frac{1}{2}}(1+x) < -1$,

$\because x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) < m$ 恒成立,

$\therefore m \geq -1$;

$$(3) \text{ 由 (1) 得: } f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+k),$$

$$\text{即 } \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} = \log_{\frac{1}{2}}(x+k),$$

即 $\frac{x+1}{x-1} = x+k$, 即 $k = \frac{2}{x-1} - x + 1$ 在 $[2, 3]$ 上有解,

$g(x) = \frac{2}{x-1} - x + 1$ 在 $[2, 3]$ 上递减,

$g(x)$ 的值域是 $[-1, 1]$,

$\therefore k \in [-1, 1]$.

【解析】

本题考查了函数的单调性、最值问题, 考查函数的奇偶性以及函数的值域问题, 是一道中档题.

(1) 根据函数的奇偶性, 求出 a 的值即可;

(2) 求出 $f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = \log_{\frac{1}{2}}(1+x)$, 根据函数的单调性求出 m 的范围即可;

(3) 问题转化为 $k = \frac{2}{x-1} - x + 1$ 在 $[2, 3]$ 上有解, 即 $g(x) = \frac{2}{x-1} - x + 1$ 在 $[2, 3]$ 上递减, 根据函数的单调性求出 $g(x)$ 的值域, 从而求出 k 的范围即可.