

2019-2020学年第一学期高三四校第一次联合调研  
高三数学（文科）

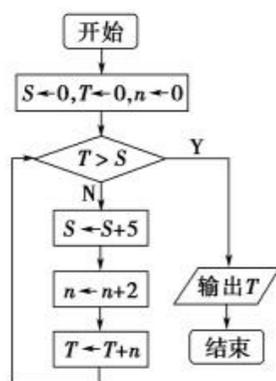
班级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_

（本试卷满分 160 分，考试时间 120 分钟）

一、填空题：（本题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分。请把答案填写在答题卡相应位置上。）

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - x - 2 \leq 0\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.
2. 若复数  $z$  满足  $\frac{z}{1+i} = i$  (其中  $i$  为虚数单位), 则  $|z+i| =$  \_\_\_\_\_.
3. 我校高一、高二、高三年级的学生人数分别为 700 人、600 人、700 人, 为了解不同年级学生的眼睛近视情况, 现用分层抽样的方法抽取了容量为 100 的样本, 则高三年级应抽取的学生人数为 \_\_\_\_\_.
4. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y \geq -1 \\ x + y \geq 1 \\ 3x - y \leq 3 \end{cases}$ , 则目标函数  $z = 2x + 3y$  的最小值是 \_\_\_\_\_.
5. 4 张卡片上分别写有数字 1, 2, 3, 4, 从这 4 张卡片中随机抽取 2 张, 则取出的 2 张卡片上的数字之和为奇数的概率是 \_\_\_\_\_.

6. 执行下面的流程图, 则输出的  $T$  的值为 \_\_\_\_\_.



(第 6 题)

7. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数, 且  $f(x+2) = f(x)$  对  $x \in \mathbb{R}$  恒成立, 当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = 2^x$ , 则  $f(-\log_2 20) =$  \_\_\_\_\_.

8. 设数列  $\{a_n\}$  是等比数列, 且  $a_n > 0$ ,  $S_n$  为其前  $n$  项和. 已知  $a_2 a_4 = 16$ ,  $\frac{a_4 + a_5 + a_8}{a_1 + a_2 + a_5} = 8$ ,

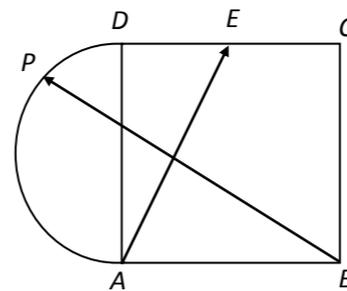
则  $S_5 =$  \_\_\_\_\_.

9. 在  $\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $b \tan A = (2c - b) \tan B$ , 则角  $A$  的大小为 \_\_\_\_\_.

10. 将函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x (x \in \mathbb{R})$  的图象向左平移  $\varphi (0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$  个单位长度后得到函数为  $y = g(x)$ , 若函数  $y = g(x)$  是奇函数, 则  $\varphi =$  \_\_\_\_\_.

11. 已知正实数  $x, y$  满足  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ , 则  $\frac{x}{x-1} + \frac{4y}{2y-1}$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

12. 如图, 已知正方形  $ABCD$  的边长是 2,  $E$  是  $CD$  的中点,  $P$  是以  $AD$  为直径的半圆上任意一点, 则  $\vec{AE} \cdot \vec{BP}$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.



(第 12 题)

13. 设  $a > 0$ , 函数  $f(x) = x + \frac{a^2}{x}$ ,  $g(x) = x - \ln x$ , 若对任意的  $x_1, x_2 \in [1, e]$ , 都有  $f(x_1) \geq g(x_2)$  成立, 则实数  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ , 若函数  $g(x) = f(x) - x + b$  有三个零点, 则实数  $b$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

二、解答题：(本题共6题，共90分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。)

15. (本题满分14分)

已知向量  $\vec{m} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $\vec{n} = (-1, 2)$ .

- (1) 若  $\vec{m} \parallel \vec{n}$ , 求  $\frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$  的值;
- (2) 若  $|\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{2}$ ,  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 求  $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$  的值.

16. (本题满分14分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 且满足  $a = 3b \cos C$ .

- (1) 求  $\frac{\tan C}{\tan B}$  的值;
- (2) 若  $a = 3$ ,  $\tan A = 3$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

17. (本题满分14分)

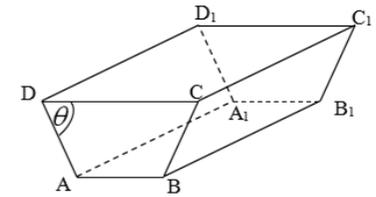
已知数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 数列  $\{b_n\}$  是公比大于0的等比数列, 且  $b_1 = -2a_1 = 2$ ,  $a_3 + b_2 = -1$ ,  $S_3 + 2b_3 = 7$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;
- (2) 设  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ .

18. (本题满分16分)

某农户准备建一个水平放置的直四棱柱形储水窖(如图), 其中直四棱柱的高  $AA_1 = 10m$ , 两底面  $ABCD$ ,  $A_1B_1C_1D_1$  是高为  $2m$ , 面积为  $10m^2$  的等腰梯形, 且  $\angle ADC = \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ). 若储水窖顶盖每平方米的造价为1百元, 侧面每平方米的造价为4百元, 底部每平方米的造价为5百元.

- (1) 试将储水窖的造价  $y$  (单位: 百元) 表示为  $\theta$  的函数;
- (2) 该农户如何设计储水窖, 才能使得储水窖的造价最低, 最低造价是多少?



(第18题图)

19. (本题满分16分)

已知数列  $\{a_n\}$  的首项为  $a$  ( $a \neq 0$ ), 前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_{n+1} = tS_n + a$  ( $t \neq 0$ ).

设  $b_n = S_n + 1$ ,  $c_n = k + b_1 + b_2 + \dots + b_n$  ( $k > 0$ ).

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 当  $t = 1$  时, 若对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|b_n| \geq |b_3|$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围;
- (3) 当  $t \neq 1$  时, 试求三个正数  $a, t, k$  的一组值, 使得  $\{c_n\}$  为等比数列, 且  $a, t, k$  成等差数列.

20. (本题满分16分)

已知函数  $f(x) = \frac{m}{x} + x \ln x$  ( $m > 0$ ),  $g(x) = \ln x - 2$ .

- (1) 当  $m = 1$  时, 求函数  $f(x)$  的单调增区间;
- (2) 设函数  $h(x) = f(x) - xg(x) - \sqrt{2}$ ,  $x > 0$ . 若函数  $y = h(h(x))$  的最小值是  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,

求实数  $m$  的值;

- (3) 若函数  $f(x), g(x)$  的定义域都是  $[1, e]$ , 对于函数  $f(x)$  的图象上的任意一点  $A$ , 在函数  $g(x)$  的图象上都存在一点  $B$ , 使得  $OA \perp OB$ , 其中  $e$  是自然对数的底数,  $O$  为坐标原点. 求实数  $m$  的取值范围.