

卷 03-期末全真模拟卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $iz = 1 - i$ ，则 $|z| =$ ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

【答案】B

【解析】 $z = \frac{1-i}{i} = \frac{i(1-i)}{i^2} = -i(1-i) = -1-i$ ，则 $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ 。 故选：B

2. $\left(x^{\frac{9}{4}} - \frac{1}{x}\right)^{13}$ 的展开式的常数项为 ()

- A. 615 B. - 615 C. 715 D. - 715

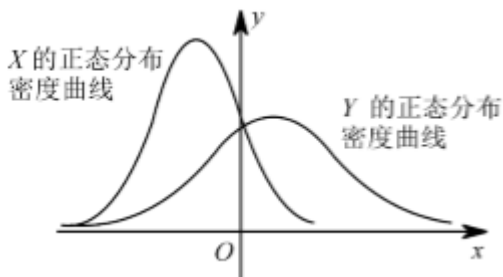
【答案】D

【解析】 $\left(x^{\frac{9}{4}} - \frac{1}{x}\right)^{13}$ 的展开式的通项为：

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_{13}^k \left(x^{\frac{9}{4}}\right)^{13-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k \\ &= (-1)^k C_{13}^k x^{\frac{13 \times 9 - 13k}{4}}, \end{aligned}$$

令 $k = 9$ ，得常数项为 $(-1)^9 C_{13}^9 = -C_{13}^4 = -715$ 。 故选：D。

3. 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ ，这两个正态分布密度曲线如图所示，则下列结论中正确 是 ()



- A. $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$ B. $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$
C. $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$ D. $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$

【答案】B

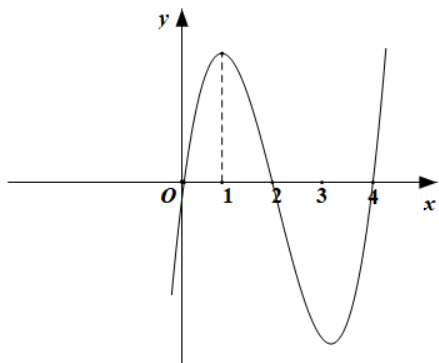


【解析】由图可得：X 的正态分布密度曲线更“瘦高”，且对称轴偏左，

结合正态分布密度曲线性质可得： $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$ ， 故选：B

4. 已知函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示，则关于函数 $y = f(x)$ 的下列说法正确的是

()



A. 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数

B. 在 $x = 0$ 处取得极大值

C. 在 $(1, 2)$ 上为增函数

D. 在 $x = 2$ 处取得极小值

【答案】C

【解析】由图可得 $f'(x)$, $f(x)$ 随 x 的变化规律，如下表

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$

则函数在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数，A 不正确；在 $x = 0$ 处取得极小值，B 不正确；

在 $(1, 2)$ 上为增函数，C 正确；在 $x = 2$ 处取得极大值，D 不正确；故选：C.

5. 有 5 名同学从左到右站成一排照相，其中中间位置只能排甲或乙，最右边不能排甲，则不同的排法共有

()

A. 42 种

B. 48 种

C. 60 种

D. 72 种

【答案】A

【解析】根据题意，中间只能排甲或乙，分 2 种情况讨论：



①甲在中间将剩余的 4 人全排列，有 $A_4^4 = 24$ 种情况，

②乙在中间，甲不能在最右端，有 3 种情况，将剩余的 3 人全排列，

安排在剩下的三个位置，此时有 $3 \times A_3^3 = 18$ 种情况，

则一共有 $24 + 18 = 42$ 种排法。 故选：A.

6. 若 $x^{10} - x^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{10}(x-1)^{10}$ ，则 a_5 为 ()

A. 251

B. 250

C. 252

D. 249

【答案】A

【解析】由题意， $x^{10} - x^5 = (x-1+1)^{10} - (x-1+1)^5$ ，

又 $(x-1+1)^{10} = C_{10}^0 \cdot (x-1)^0 + C_{10}^1 \cdot (x-1)^1 + \cdots + C_{10}^{10} \cdot (x-1)^{10}$ ，

$(x-1+1)^5 = C_5^0 \cdot (x-1)^0 + C_5^1 \cdot (x-1)^1 + \cdots + C_5^5 \cdot (x-1)^5$ ，

因为， $x^{10} - x^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{10}(x-1)^{10}$ ，即 $a_5 = C_{10}^5 - 1 = 251$ 。 故选：A.

7. 已知函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$ ， $f(x) - xf'(x) > 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，则下列不等式中一定成立的是

()

A. $f(\pi) > f(e)$

B. $f(\pi) < f(e)$

C. $\frac{f(\pi)}{\pi} > \frac{f(e)}{e}$

D. $\frac{f(\pi)}{\pi} < \frac{f(e)}{e}$

【答案】D

【解析】设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，则 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ ，

$\because f(x) - xf'(x) > 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，

$\therefore g'(x) < 0$ ，即 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

$\pi > e$ ， $\therefore g(\pi) < g(e)$ ，即 $\frac{f(\pi)}{\pi} < \frac{f(e)}{e}$ ， 故选：D.

8. 一个袋中放有大小、形状均相同的小球，其中红球 1 个、黑球 2 个，现随机等可能取出小球，当有放回依次取出两个小球时，记取出的红球数为 ξ_1 ；当无放回依次取出两个小球时，记取出的红球数为 ξ_2 ，则 ()

A. $E\xi_1 < E\xi_2$ ， $D\xi_1 < D\xi_2$

B. $E\xi_1 = E\xi_2$ ， $D\xi_1 > D\xi_2$



C. $E\xi_1 = E\xi_2$, $D\xi_1 < D\xi_2$

D. $E\xi_1 > E\xi_2$, $D\xi_1 > D\xi_2$

【答案】B

【解析】 ξ_1 可能的取值为 0,1,2； ξ_2 可能的取值为 0,1，

$$P(\xi_1=0)=\frac{4}{9}, P(\xi_1=2)=\frac{1}{9}, P(\xi_1=1)=1-\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{4}{9},$$

$$\text{故 } E\xi_1=\frac{2}{3}, D\xi_1=0^2\times\frac{4}{9}+2^2\times\frac{1}{9}+1^2\times\frac{4}{9}-\frac{4}{9}=\frac{4}{9}.$$

$$P(\xi_2=0)=\frac{2\times 1}{3\times 2}=\frac{1}{3}, P(\xi_2=1)=\frac{2\times 1\times 2}{3\times 2}=\frac{2}{3},$$

$$\text{故 } E\xi_2=\frac{2}{3}, D\xi_2=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9},$$

$$\text{故 } E\xi_1 = E\xi_2, D\xi_1 > D\xi_2. \quad \text{故选: B.}$$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中。有多项符合题目要求。

全部选对的得 5 分，部分选对的对 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列选项中正确的有 ()

A. $C_n^m = C_n^{n-m}$

B. $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

C. $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_{n+1}^m$

D. 已知 $C_{28}^x = C_{28}^{2x-8}$ ，则 x 的值为 8 或 12

【答案】ABD

【解析】对于选项 A，因为 $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ， $C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ，所以

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{对于选项 B, } mC_n^m = m \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} = m \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{m \cdot (m-1)!(n-m)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(m-1)![(n-1)-(m-1)]!} = nC_{n-1}^{m-1},$$

故 B 正确;

对于选项 C，当 $m=n=1$ 时，左边 $= C_2^2 = 1$ ，右边 $= C_1^1 + C_2^1 = 1+2=3$ ，等式不成立，故 C 错误;

对于选项 D，由 $C_{28}^x = C_{28}^{2x-8}$ ，可得 $2x-8=x$ 或 $2x-8+x=28$ ，解得：x=8 或 x=12



故 D 正确. 故选: ABD

10. 针对时下的“抖音热”，某校团委对“学生性别和喜欢抖音是否有关”作了一次调查，其中被调查的男生女生人数相同，男生喜欢抖音的人数占男生人数的 $\frac{4}{5}$ ，女生喜欢抖音的人数占女生人数 $\frac{3}{5}$ ，若有 95% 的把握认为是否喜欢抖音和性别有关则调查人数中男生可能有 () 人

附表:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010
k	3.841	6.635

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

A. 25 B. 45 C. 60 D. 75

【答案】BC

【解析】设男生的人数为 $5n (n \in N^*)$ ，根据题意列出 2×2 列联表如下表所示:

	男生	女生	合计
喜欢抖音	$4n$	$3n$	$7n$
不喜欢抖音	n	$2n$	$3n$
合计	$5n$	$5n$	$10n$

$$\text{则 } K^2 = \frac{10n \times (4n \times 2n - 3n \times n)}{5n \times 5n \times 7n \times 3n} = \frac{10n}{21},$$

由于有 95% 的把握认为是否喜欢抖音和性别有关，则 $3.841 \leq K^2 < 6.632$ ，

$$\text{即 } 3.841 \leq \frac{10n}{21} < 6.632, \text{ 得 } 8.0661 \leq n < 13.9272,$$

$\therefore n \in N^*$ ，则 n 的可能取值有 9、10、11、12，

因此，调查人数中男生人数的可能值为 45 或 60. 故选: BC.

11. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 4 (a \in R)$ ，则下列结论正确的是 ()



- A. 当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 为奇函数
 B. 当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
 C. 当 $a=-3$ 时，函数 $f(2)$ 有 2 个不同的零点
 D. 若函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减，则 $a<-3$

【答案】BC

【解析】 $f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$ ，

对于 A: $a=0$ 时， $f(x) = x^3 + 4$ ，显然不是奇函数，故 A 错误，

对于 B: $a>0$ 时，令 $f'(x) > 0$ ，解得： $x > 0$ 或 $x < -\frac{2a}{3}$ ，

故 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，B 正确，

对于 C: $a=-3$ 时， $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ ， $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ ，

令 $f'(x) > 0$ ，解得： $x > 2$ 或 $x < 0$ ，令 $f'(x) < 0$ ，解得： $0 < x < 2$ ，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 递增，在 $(0, 2)$ 递减，在 $(2, +\infty)$ 递增，

$f(x)_{\text{极大值}} = f(0) = 4$ ， $f(x)_{\text{极小值}} = f(2) = 0$ ，

$x \rightarrow -\infty$ 时， $f(x) \rightarrow -\infty$ ，

故 $x < 0$ 时 $f(x)$ 有 1 个零点， $x=2$ 是 1 个零点，则 $f(x)$ 有 2 个不同的零点，C 正确；

对于 D: $f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$ ，

结合题意 $(0, 2) \subseteq (0, -\frac{2a}{3})(a < 0)$ ，则 $-\frac{2a}{3} \geq 2$ ，解得： $a \leq -3$ ，故 D 错误； 故选：BC.

12. 已知随机变量 ξ 的分布列是

ξ	-1	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{p}{2}$

随机变量 η 的分布列是

η	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{p}{2}$

则当 p 在 $(0, 1)$ 内增大时，下列选项中正确的是 ()



- A. $E(\xi) = E(\eta)$ B. $V(\xi) = V(\eta)$
- C. $E(\xi)$ 增大 D. $V(\eta)$ 先增大后减小

【答案】BC

【解析】对于 A, $\because \eta = \xi + 2$, $\therefore E(\eta) = E(\xi) + 2$, 故 A 错误;

对于 B, $\because \eta = \xi + 2$, $\therefore V(\xi) = V(\eta)$, 故 B 正确;

对于 C, $\because E(\xi) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p$,

$\therefore$ 当 p 在 $(0,1)$ 内增大时, $E(\xi)$ 增大, 故 C 正确;

对于 D, $\because E(\eta) = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1-p}{2} + 3 \times \frac{p}{2} = \frac{3}{2} + \frac{p}{2}$,

$\therefore V(\eta) = (-\frac{1}{2} - \frac{p}{2})^2 \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{p}{2})^2 \times \frac{1-p}{2} + (\frac{3}{2} - \frac{p}{2}) \times \frac{p}{2} = -\frac{1}{4}(p-2)^2 + \frac{5}{4}$,

$\therefore$ 当 p 在 $(0,1)$ 内增大时, $V(\eta)$ 单调递增, 故 D 错误. 故选: BC.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $\left(x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^5$ 展开式的各项系数之和为 32, 则其展开式中的常数项为_____

【答案】10

【解析】 $\because \left(x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^5$ 展开式的各项系数之和为 32,

令 $x=1$, 得 $1+a^5=32$, 解得 $a=1$,

则 $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5r-15}$

令 $r=3$, 可得常数项为 $C_5^3=10$, 故答案为: 10

14. 期中考试结束后, 某教师随机抽取了本班五位同学的数学成绩进行统计, 五位同学平均每天学习数学的时间 t (分钟) 和数学成绩 Y (分) 之间的一组数据如下表所示:

时间 t	30	40	70	90	120
--------	----	----	----	----	-----



成绩 y	31	49	m	87	95
--------	----	----	-----	----	----

通过分析，发现数学成绩 y 对学习数学的时间 t 具有线性相关关系，其回归方程 $y = 0.7t + 16$ ，则表格中 m 的值是_____.

【答案】63

【分析】利用回归方程过样本中心点 $(\bar{t}, \bar{y})$ 求解即可.

【解析】由图表可得 $\bar{t} = \frac{30+40+70+90+120}{5} = 70$ ，所以 $\bar{y} = 0.7 \times 70 + 16 = 65$ ，
则 $\bar{y} = \frac{31+49+m+87+95}{5} = 65$ ，即 $m = 63$. 故答案为：63

15. 为了抗击新冠肺炎疫情，现从 A 医院 150 人和 B 医院 100 人中，按分层抽样的方法，选出 5 人加入“援鄂医疗队”，现拟再从此 5 人中选出两人作为联络人，则这两名联络人中 B 医院至少有一人的概率是_____；设两名联络人中 B 医院的人数为 X ，则 X 的期望为_____.

【答案】 $\frac{7}{10}$ $\frac{4}{5}$

【解析】因为是分层抽样的方法选出的 5 人，所以这 5 人中，

A 医院有 $5 \times \frac{150}{150+100} = 3$ 人，B 医院有 $5 \times \frac{100}{150+100} = 2$ 人，

所以从这 5 人中选出 2 人，B 医院至少有 1 人的概率为 $\frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} + \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{7}{10}$ ，

由题意可知 X 的取值可能为 0, 1, 2，当 $X = 0$ 时， $P = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$ ，

当 $X = 1$ 时， $P = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$ ，当 $X = 2$ 时， $P = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$ ，

则 $E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$. 故答案为 $\frac{7}{10}$ ， $\frac{4}{5}$.

16. 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) > 0$ ，且满足 $f(x) < f'(x) < 2f(x)$ ，若 $f(1) = k \cdot f(2)$ ，则实数 k 的取值范围为_____.

【答案】 $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$

【解析】设 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ，则 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增，



即 $g(1) = \frac{f(1)}{e} < g(2) = \frac{f(2)}{e^2}$ ，整理得， $\frac{f(1)}{f(2)} = k < \frac{1}{e}$ ；

设 $h(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ ，则 $h'(x) = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} < 0$ ，所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递减，

即 $h(1) = \frac{f(1)}{e^2} > h(2) = \frac{f(2)}{e^4}$ ，整理得， $\frac{f(1)}{f(2)} = k > \frac{1}{e^2}$ ，

综上所述， $k \in \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$ 。故答案为： $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$ 。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 已知在 $\left(\sqrt[3]{x^2} + 3x^2\right)^n$ 的展开式中各项系数的和比它的二项式系数的和大 992。

(1) 求 n 的值；

(2) 求展开式中 x^6 的项；

【答案】(1) $n = 5$ ；(2) $T_3 = 90x^6$ ；

【解析】(1) $\left(\sqrt[3]{x^2} + 3x^2\right)^n$ 展开式各项系数的和为： $\left(\sqrt[3]{1^2} + 3 \times 1^2\right)^n = 4^n$ ；二项式系数的和为： 2^n

又各项系数的和比二项式系数的和大 992

$$\therefore 4^n - 2^n = 992, \text{ 即 } (2^n)^2 - 2^n - 992 = 0, \text{ 解得 } 2^n = 32$$

$$\therefore n = 5$$

(2) $\left(\sqrt[3]{x^2} + 3x^2\right)^5$ 展开式的通项公式为： $T_{r+1} = C_5^r \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{5-r} (3x^2)^r = C_5^r 3^r x^{\frac{10+4r}{3}}$

令 $\frac{10+4r}{3} = 6$ ，解得 $r = 2$

展开式中 x^6 的项为： $T_3 = C_5^2 3^2 x^6 = 90x^6$

18. 毕业季有 6 位好友欲合影留念，现排成一排，如果：

(1) A、B 两人不排在一起，有几种排法？

(2) A、B 两人必须排在一起，有几种排法？



(3) A 不在排头, B 不在排尾, 有几种排法?

【答案】(1) 480; (2) 240; (3) 504

【解析】(1) 将 A 、 B 插入到其余 4 人所形成的 5 个空中, 因此, 排法种数为 $A_4^4 A_5^2 = 24 \times 20 = 480$;

(2) 将 A 、 B 两人捆绑在一起看作一个复合元素和其他 4 人去安排,

因此, 排法种数为 $A_2^2 A_5^5 = 2 \times 120 = 240$;

(3) 分以下两种情况讨论:

①若 A 在排尾, 则剩下的 5 人全排列, 故有 $A_5^5 = 120$ 种排法;

②若 A 不在排尾, 则 A 有 4 个位置可选, B 有 4 个位置可选, 将剩下的 4 人全排列, 安排在其它 4 个位置即可, 此时, 共有 $C_4^1 C_4^1 A_4^4 = 384$ 种排法.

综上所述, 共有 $120 + 384 = 504$ 种不同的排法种数.

19. 地区举办知识竞答比赛, 比赛共有四道题, 规则如下: 答题过程中不论何时, 若选手出现两题答错, 则该选手被淘汰分数记为 0, 其它情况下, 选手每答对一题得 1 分, 此外若选手存在恰连续 3 次答对题目, 则额外加 1 分, 若 4 次全答对, 则额外加 2 分. 已知某选手每次答题的正确率都是 $\frac{2}{3}$, 且每次答题结果互不影响.

(1) 求该选手恰答对 3 道题的概率;

(2) 记 X 为该选手参加比赛的最终得分, 求 X 的分布列与数学期望.

【答案】(1) $\frac{32}{81}$; (2) $\frac{208}{81}$.

【解析】(1) $\because$ 该选手每次答题的正确率都是 $\frac{2}{3}$, 四道题答对 3 的情况有 C_4^3 种

$\therefore$ 恰答对 3 道题的概率 $P = C_4^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{32}{81}$

(2) 由题 X 可能的取值为 0, 3, 4, 6



$$P(X=3)=2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{81}, \quad P(X=4)=2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{81}, \quad P(X=6)=\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81},$$

$$P(X=0)=1-P(X=3)-P(X=4)-P(X=6)=\frac{11}{27}$$

∴ X 的分布列如下

X	0	3	4	6
P	$\frac{11}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$

20. 新冠肺炎疫情防控时期，各级各类学校纷纷组织师生开展了“停课不停学”活动，为了解班级线上学习情况，某位班主任老师进行了有关调查研究。

(1) 从班级随机选出 5 名同学，对比研究了线上学习前后两次数学考试成绩，如下表：

线上学习前成绩 x	120	110	100	90	80
线上学习后成绩 y	145	130	120	105	100

(1) 求 y 关于 x 的线性回归方程；

参考公式：在线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中， $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$

(2) 针对全班 45 名同学（25 名女生，20 名男生）的线上学习满意度调查中，女姓满意率为 80%，男生满意率为 75%，填写下面列联表，判断能否在犯错误概率不超过 0.01 的前提下，认为线上学习满意度与学生性别有关？

	满意人数	不满意人数	合计
男生			
女生			
合计			



参考公式和数据： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ， $\frac{P(\chi^2 \geq k)}{k}$ | $\frac{0.050}{3.841}$ $\frac{0.010}{6.635}$ $\frac{0.001}{10.828}$

【答案】(1) $y = 1.15x + 5$ ；(2) 列联表详见解析，不能。

【解析】(1) $\bar{x} = 100$ ， $\bar{y} = 120$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{20 \times 25 + 10 \times 10 + 0 + 15 \times 10 + 20 \times 20}{20^2 + 10^2 + 0^2 + 10^2 + 20^2} = \frac{1150}{1000} = 1.15$$

所以 $a = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 120 - 1.15 \times 100 = 5$ ，

所以线性回归方程 $y = 1.15x + 5$

(2) 列联表如下：

	满意人数	不满意人数	合计
男生	15	5	20
女生	20	5	25
合计	35	10	45

提出假设 H_0 ：学生线上学习满意度与学生性别无关，

计算得： $K^2 = \frac{45(75-100)^2}{20 \times 25 \times 35 \times 10} = \frac{9}{56} \approx 0.161$

因为 $K^2 \approx 0.161 < 6.635$

所以在犯错误概率不超过 0.01 的前提下，不能认为线上学习满意度与学生性别有关。

21. 为了研究家用轿车在高速公路上的车速情况，交通部门对 100 名家用轿车驾驶员进行调查，得到其在高速公路上行驶时的平均车速情况为：在 55 名男性驾驶员中，平均车速超过 100 km/h 的有 40 人；在 45 名女性驾驶员中，平均车速不超过 100 km/h 的有 25 人。



(1) 完成下面的列联表，并判断是否有 99.5% 的把握认为平均车速超过 100 km/h 的人与性别有关.

	平均车速超过 100 km/h 人数	平均车速不超过 100 km/h 人数	合计
男性驾驶员人数			
女性驾驶员人数			
合计			

(2) 以上述数据样本来估计总体，现从高速公路上行驶的大量家用轿车中随机抽取 3 辆，记这 3 辆车中驾驶员为男性且车速超过 100 km/h 的车辆数为 X ，若每次抽取的结果是相互独立的，求 X 的分布列和数学期望.

参考公式与数据： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$

$P(\chi^2 \geq k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

【答案】(1) 填表见解析；有；(2) 分布列见解析；期望为 $\frac{6}{5}$.

【解析】(1)

	平均车速超过 100 km/h 人数	平均车速不超过 100 km/h 人数	合计
男性驾驶员人数	40	15	55
女性驾驶员人数	20	25	45
合计	60	40	100

因为 $K^2 = \frac{100 \times (40 \times 25 - 15 \times 20)^2}{60 \times 40 \times 55 \times 45} \approx 8.249 > 7.879$ ，所以有 99.5% 的把握认为平均车速超过 100 km/h 与

性别有关；

(2) 根据样本估计总体的思想，从高速公路上行驶的大量家用轿车中随机抽取 1 辆，驾驶员为男性且车速

超过 100 km/h 的概率为 $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ ，



X 可取值是 0, 1, 2, 3, 由题知 $X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$,

$$\text{有: } P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}, \quad P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{36}{125}, \quad P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{8}{125},$$

分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$$E(X) = 0 \times \frac{27}{125} + 1 \times \frac{54}{125} + 2 \times \frac{36}{125} + 3 \times \frac{8}{125} = \frac{6}{5}.$$

22. 已知函数 $f(x) = (x-1)e^x$, $g(x) = \ln x$, 其中 e 是自然对数的底数.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 当 $x \geq 1$ 时, 关于 x 不等式 $ag(x) \leq 2x+2$ 恒成立, 求整数 a 的最大值;

(3) 设函数 $h(x) = bf(x) - g(x)$, 若函数 $h(x)$ 恰好有 2 个零点, 求实数 b 的取值范围. (取 $\ln 3.5 = 1.25$,

$\ln 4 = 1.40$)

【答案】(1) $y = ex - e$; (2) 7; (3) $\left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

【解析】(1) 因为 $f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$, 所以切线的斜率 $k = f'(1) = e$,

又因为切点为 $(1, 0)$, 所以所求切线方程为 $y = ex - e$.

(2) 设 $\varphi(x) = 2x + 2 - a \ln x$, 则 $\varphi(x) = 2x + 2 - a \ln x \geq 0$ 对 $x \geq 1$ 恒成立,

$$\varphi'(x) = 2 - \frac{a}{x} = \frac{2x - a}{x},$$

当 $a \leq 2$ 时, $\varphi'(x) \geq 0$, 函数 $\varphi(x)$ 递增, 则 $\varphi(x) \geq \varphi(1) = 4 > 0$, 符合题意;



当 $a > 2$ 时，由 $\varphi'(x) = 0$ 得 $x = \frac{a}{2} > 1$ ，

则函数 $\varphi(x)$ 在区间 $\left[1, \frac{a}{2}\right)$ 上递减，在区间 $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$ 上递增，

则 $\varphi(x)_{\min} = \varphi\left(\frac{a}{2}\right) = a + 2 - a \ln \frac{a}{2}$ ，

设 $\mu(a) = a + 2 - a \ln \frac{a}{2}$ ，则 $\mu(a) = a + 2 - a \ln a + a \ln 2$ ，其中 $a > 2$ ，

所以 $\mu'(a) = 1 - \ln a - 1 + \ln 2 = \ln 2 - \ln a < 0$ ，

所以当 $a > 2$ 时 $\mu(a) = a + 2 - a \ln \frac{a}{2}$ 递减，

因为 $\mu(7) = 7 + 2 - 7 \ln \frac{7}{2} = 0.25 > 0$ ， $\mu(8) = 8 + 2 - 8 \ln 4 = -1.20 < 0$ ，

所以满足条件的 a 的最大整数是 7。

(3) $h(x) = b(x-1)e^x - \ln x = bxe^x - be^x - \ln x$ ，

则 $h'(x) = \frac{bx^2e^x - 1}{x}$ ，设 $\varphi(x) = bx^2e^x - 1$ ，

当 $b \leq 0$ 时， $h'(x) = \frac{bx^2e^x - 1}{x} < 0$ ，函数 $h(x)$ 递减，不合题意；

当 $b > 0$ 时，因为 $\varphi'(x) = 2bxex + bx^2e^x > 0$ 恒成立，所以 $\varphi(x) = bx^2e^x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增，

因为 $\varphi(0) = -1$ ， $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) = e^{\frac{1}{\sqrt{b}}} - 1 > 0$ ，则 $\exists x_0 > 0$ 使得 $\varphi(x_0) = bx_0^2e^{x_0} - 1 = 0$ ，

当 $x \in (0, x_0)$ ， $\varphi(x) < 0$ ， $h(x)$ 递减，当 $x \in (x_0, +\infty)$ ， $\varphi(x) > 0$ ， $h(x)$ 递增；

所以 $h(x)_{\min} = h(x_0) = b(x_0 - 1)e^{x_0} - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2} - \ln x_0$ ，

则当 $x_0 = 1$ 时， $h(x)_{\min} = 0$ ，可得 $b = \frac{1}{e}$ ，此时 $h(x)$ 只有唯一零点 1；

当 $0 < b < \frac{1}{e}$ 时，因为 $\varphi(1) = be - 1 < 0$ ， $\varphi\left(\ln \frac{1}{b}\right) = \left(\ln \frac{1}{b}\right)^2 - 1 > 0$ ，

则 $1 < x_0 < \ln \frac{1}{b}$ ，因为 $h(1) = 0$ ，



所以 $h(x_0) < 0$ ， $h\left(\ln \frac{1}{b}\right) = \ln \frac{1}{b} - 1 - \ln\left(\ln \frac{1}{b}\right) > \ln \frac{1}{b} - 1 - \left(\ln \frac{1}{b} - 1\right) = 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 有唯一零点，

故当 $0 < b < \frac{1}{e}$ 时， $h(x)$ 有两个零点；

当 $b > \frac{1}{e}$ 时，同理可得 $h(x)$ 有两个零点；

所以 b 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 。

