

卷 02-期末全真模拟卷二

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 是虚数单位，则化简 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2020}$ 的结果为 ()

- A. i B. $-i$ C. -1 D. 1

【答案】D

【解析】 $\because \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$ ，又 $i^4 = 1$ ， $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2020} = i^{2020} = (i^4)^{505} = 1$ 。 故选：D.

2. 为了解学生对街舞的喜欢是否与性别有关，在全校学生中进行抽样调查，根据数据，求得 K^2 的观测值

$k_0 \approx 4.804$ ，则至少有 () 的把握认为对街舞的喜欢与性别有关。参考数据：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

- A. 90% B. 95% C. 97.5% D. 99%

【答案】B

【解析】因为 $4.804 > 3.841$ ，所以有 95% 的把握认为对街舞的喜欢与性别有关。 故选：B.

3. 某产品的广告费用 x 与销售额 y 的统计数据如下表：

广告费用 x (万元)	4	2	3	5
销售额 y (万元)	49	26	39	54

根据上表可得回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中的 $\hat{b}$ 为 9.4，据此模型预报广告费用为 6 万元时销售额为 ()

- A. 63.6 万元 B. 65.5 万元 C. 67.7 万元 D. 72.0 万元

【答案】B

【解析】 $\because \bar{x} = \frac{4+2+3+5}{4} = 3.5, \bar{y} = \frac{49+26+39+54}{4} = 42$ ，



∵数据的样本中心点在线性回归直线上，

回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中的 $\hat{b}$ 为 9.4，

∴ $42 = 9.4 \times 3.5 + \hat{a}$ ，

∴ $\hat{a} = 9.1$ ，

∴线性回归方程是 $y = 9.4x + 9.1$ ，

∴广告费用为 6 万元时销售额为 $9.4 \times 6 + 9.1 = 65.5$ 故选:B

4. 掷骰子 2 次，每个结果以 (x_1, y_1) 记之，其中 x_1, x_2 ，分别表示第一颗，第二颗骰子的点数，设

$A = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 6\}$ ， $B = \{(x_1, x_2) | x_1 > x_2\}$ ，则 $P(B|A) = (\quad)$

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】根据题意 $A = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 6\}$

则集合 A 所有可能为 $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$

$B = \{(x_1, x_2) | x_1 > x_2\}$ ，则 B 集合为 $(4, 2), (5, 1)$

根据条件概率求法可得 $P(B|A) = \frac{2}{5}$ ， 故选:C

5. 在某次学科知识竞赛中（总分 100 分），若参赛学生成绩 ξ 服从 $N(80, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$)，若 ξ 在 $(70, 90)$ 内的概率为 0.7，则落在 $[90, 100]$ 内的概率为 ()

A. 0.2

B. 0.15

C. 0.1

D. 0.05

【答案】B

【解析】由参赛学生成绩 ξ 服从 $N(80, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$)，

可知平均数 $\mu = 80$ ，

则正态分布的概率密度曲线关于 $\mu = 80$ 对称，

因为 ξ 在 $(70, 90)$ 内的概率为 0.7，

所以 ξ 在 $(80, 90)$ 内的概率为 0.35，

所以 ξ 在 $[90, 100]$ 内的概率为 $0.5 - 0.35 = 0.15$ 。 故选: B.



6. 为支援湖北抗击新冠疫情，无锡市某医院欲从 6 名医生和 4 名护士中抽选 3 人（医生和护士均至少有一人）分配到 A, B, C 三个地区参加医疗救援（每个地区一人），方案要求医生不能去 A 地区，则分配方案共有（ ）

- A. 264 种 B. 224 种 C. 250 种 D. 236 种

【答案】A

【解析】当选取的是 1 名医生 2 名护士，共有 $C_6^1 C_4^2 = 36$ 种选法，分配到 A, B, C 三个地区参加医疗救援（每个地区一人），方案要求医生不能去 A 地区，共有 $2A_2^2 = 4$ 种，即一共 $36 \times 4 = 144$ 种方案；

当选取的是 2 名医生 1 名护士，共有 $C_6^2 C_4^1 = 60$ 种选法，分配到 A, B, C 三个地区参加医疗救援（每个地区一人），方案要求医生不能去 A 地区，共有 $A_2^2 = 2$ 种，即一共 $60 \times 2 = 120$ 种方案。

综上所述：分配方案共有 264 种。 故选：A

7. 在复平面内，复数 $z = a + bi$ ($a \in R, b \in R$) 对应向量 $\overrightarrow{OZ}$ (O 为坐标原点)，设 $|\overrightarrow{OZ}| = r$ ，以射线 Ox 为始边， OZ 为终边逆时针旋转的角为 θ ，则 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，法国数学家棣莫弗发现棣莫弗定理：

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ， $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ ，则 $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ ，由棣莫弗定理导出了复数乘方公式： $z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ，则 $(-1 + \sqrt{3}i)^{10} =$ ()

- A. $1024 - 1024\sqrt{3}i$ B. $-1024 + 1024\sqrt{3}i$ C. $512 - 512\sqrt{3}i$ D. $-512 + 512\sqrt{3}i$

【答案】D

【解析】

$$(-1 + \sqrt{3}i)^{10} = \left(2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) \right)^{10} = 2^{10} \left(\cos \frac{20\pi}{3} + i \sin \frac{20\pi}{3}\right) = 2^{10} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -512 + 512\sqrt{3}i,$$

故选：D.

8. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上都存在导函数 $f'(x)$ ，对于任意的实数都有 $\frac{f(-x)}{f(x)} = e^{2x}$ ，当 $x < 0$ 时，

$f(x) + f'(x) > 0$ ，若 $e^a f(2a+1) \geq f(a+1)$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ B. $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$ C. $[0, +\infty)$ D. $(-\infty, 0]$

【答案】B



【解析】令 $g(x) = e^x f(x)$ ，则当 $x < 0$ 时， $g'(x) = e^x [f(x) + f'(x)] > 0$ ，

又 $g(-x) = e^{-x} f(-x) = e^x f(x) = g(x)$ ，所以 $g(x)$ 为偶函数，

从而 $e^a f(2a+1) \geq f(a+1)$ 等价于 $e^{2a+1} f(2a+1) \geq e^{a+1} f(a+1)$ ， $g(2a+1) \geq g(a+1)$ ，

因此 $g(-|2a+1|) \geq g(-|a+1|)$ ， $-|2a+1| \geq -|a+1|$ ， $3a^2 + 2a \leq 0 \therefore -\frac{2}{3} \leq a \leq 0$ 。 故选：B.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中。有多项符合题目要求。

全部选对的得 5 分，部分选对的对 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列说法中错误的是（ ）

- A. 对于回归方程 $y = 2020 - 4x$ ，变量 x 增加一个单位， y 平均减少 4 个单位
- B. 互斥事件一定是对立事件，对立事件不一定是互斥事件
- C. 对分类变量 X 与 Y ，随机变量 K^2 的观测值 k 越小，则判断“ X 与 Y 有关系”的把握程度越大
- D. 两个随机变量的线性相关系数越接近 0，则这两个随机变量相关性越强

【答案】BCD

【解析】对于 A 中，根据回归系数的含义，可得回归方程 $y = 2020 - 4x$ ，变量 x 增加一个单位， y 平均减少 4 个单位，所以 A 是正确的；

对于 B 中，根据互斥事件与对立事件的关系，可得互斥事件不一定是对立事件，对立事件一定是互斥事件，所以 B 项不正确；

对于 C 中，对分类变量 X 与 Y ，随机变量 K^2 的观测值 k 越大，则判断“ X 与 Y 有关系”的把握程度越大，所以 C 项不正确；

对于 D 中，两个随机变量的线性相关系数越接近 0，则这两个随机变量相关性越弱，所以 D 项不正确。
故选：BCD.

10. 一袋中有 6 个大小相同的黑球，编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6，还有 4 个同样大小的白球，编号为 7, 8, 9,

10，现从中任取 4 个球，则下列结论中正确的是（ ）

- A. 取出的最大号码 X 服从超几何分布
- B. 取出的黑球个数 Y 服从超几何分布
- C. 取出 2 个白球的概率为 $\frac{1}{14}$



D. 若取出一个黑球记 2 分，取出一个白球记 1 分，则总得分最大的概率为 $\frac{1}{14}$

【答案】BD

【解析】一袋中有 6 个大小相同的黑球，编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6，还有 4 个同样大小的白球，编号为 7, 8, 9, 10，现从中任取 4 个球，

对于 A，超几何分布取出某个对象的结果数不定，

也就是说超几何分布的随机变量为实验次数，即指某事件发生 n 次的试验次数，

由此可知取出的最大号码 X 不服从超几何分布，故 A 错误；

对于 B，超几何分布的随机变量为实验次数，即指某事件发生 n 次的试验次数，

由此可知取出的黑球个数 Y 服从超几何分布，故 B 正确；

对于 C，取出 2 个白球的概率为 $p = \frac{C_6^2 C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7}$ ，故 C 错误；

对于 D，若取出一个黑球记 2 分，取出一个白球记 1 分，

则取出四个黑球的总得分最大，

$\therefore$ 总得分最大的概率为 $P = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14}$ ，故 D 正确。故选：BD.

11. 现安排高二年级 A, B, C 三名同学到甲、乙、丙、丁四个工厂进行社会实践，每名同学只能选择一个工厂)，且允许多人选择同一个工厂，则下列说法正确的是 ()

A. 所有可能的方法有 3^4 种

B. 若工厂甲必须有同学去，则不同的安排方法有 37 种

C. 若同学 A 必须去工厂甲，则不同的安排方法有 16 种

D. 若三名同学所选工厂各不相同，则不同的安排方法有 24 种

【答案】BCD

【解析】由题意可知，对于选项 A，每名同学都有 4 种选择，则只能选择一个工厂共有 4^3 种，所以选项 A

错误；对于选项 B，则①若有 1 名同学去工厂甲，则去工厂甲的同学情况为 C_3^1 ，另外两名同学的安排方法

有 $3 \times 3 = 9$ 种，则此情况共有 $C_3^1 \times 9 = 27$ 种；②若有 2 名同学去工厂甲，则同学选派情况有 C_3^2 ，另外 1 名

同学的排法有 3 种，此种情况共有 $C_3^2 \times 3 = 9$ 种；③若有 3 名同学去工厂甲，即 3 名同学都去工厂甲，此种

情况唯一，为 1 种；则工厂甲必须有同学去的情况共有 $27 + 9 + 1 = 37$ 种安排方法，所以选项 B 正确；对于



选项 C，若同学 A 必须去工厂甲，则另外 2 名同学各有 4 个工厂选择，即另外 2 名同学有 $4 \times 4 = 16$ 种安排

方法，所以选项 C 正确；对于选项 D，若三名同学所选工厂各不相同，则有 $C_4^3 A_3^3 = 24$ 种，所以选项 D 正确；

综上，故选：BCD.

12. 某计算机程序每运行一次都随机出现一个五位二进制数 $A = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ （例如 10100）其中 A 的各位数中 $a_k (k = 2, 3, 4, 5)$ 出现 0 的概率为 $\frac{1}{3}$ ，出现 1 的概率为 $\frac{2}{3}$ ，记 $X = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ ，则当程序运行一次时（ ）

A. X 服从二项分布

$$B. P(X=1) = \frac{8}{81}$$

C. X 的期望 $E(X) = \frac{8}{3}$

$$D. X \text{ 的方差 } V(X) = \frac{8}{3}$$

【答案】ABC

【解析】由于二进制数 A 的特点知每一个数位上的数字只能填 0，1，

且每个数位上的数字再填时互不影响，故以后的 5 位数中后 4 位的所有结果有 4 类：

①后 4 个数出现 0， $X=0$ ，记其概率为 $P(X=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ ；

②后 4 个数位只出现 1 个 1， $X=1$ ，记其概率为 $P(X=1) = C_4^1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$ ；

③后 4 位数位出现 2 个 1， $X=2$ ，记其概率为 $P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$ ，

④后 4 个数为上出现 3 个 1，记其概率为 $P(X=3) = C_4^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81}$ ，

⑤后 4 个数为都出现 1， $X=4$ ，记其概率为 $P(X=4) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{32}{81}$ ，

故 $X \sim B(4, \frac{2}{3})$ ，故 A 正确；

又 $P(X=1) = C_4^1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$ ，故 B 正确；

$\because X \sim B(4, \frac{2}{3})$ ， $\therefore E(X) = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ ，故 C 正确；

$\because X \sim B(4, \frac{2}{3})$ ， $\therefore X$ 的方差 $V(X) = 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$ ，故 D 错误。故选：ABC。

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. i 是虚数单位，复数 $\frac{1+ai}{2-i}$ 为纯虚数，则实数 a 为_____

【答案】2



【解析】 $\because \frac{1+ai}{2-i} = \frac{(1+ai)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2-a+(2a+1)i}{5} = \frac{2-a}{5} + \frac{(2a+1)i}{5}$

复数 $\frac{1+ai}{2-i}$ 为纯虚数

$\therefore \begin{cases} 2-a=0 \\ 2a+1 \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $a=2$ ，故答案为:2

14. 某省新高考方案规定的选科要求为:学生先从物理、历史两科中任选一科，再从化学、生物、政治、地理四门学科中任选两科. 现有甲、乙两名学生按上面规定选科，则甲、乙恰有一门学科相同的选科方法有_____种

【答案】60

【解析】分为两类，第一类物理、历史两科中是相同学科，则有 $C_2^1 C_4^2 C_2^2 = 12$ 种选法；第二类物理、历史两科中没相同学科，则有 $A_2^2 C_4^1 A_3^2 = 48$ 种选法，

所以甲、乙二人恰有一门学科相同的选法有 $12+48=60$ 种，

故答案为:60.

15. 已知随机变量 X 的分布列为 $P(X=n) = \frac{k}{n^2+n} (n=1,2,3,4)$ ，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $P(2 \leq X \leq 3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{5}{4}$ $\frac{5}{16}$

【解析】由条件可知: $\frac{k}{2} + \frac{k}{6} + \frac{k}{12} + \frac{k}{20} = 1$ ，解得: $k = \frac{5}{4}$ ，

$P(2 \leq X \leq 3) = \frac{k}{6} + \frac{k}{12} = \frac{k}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{16}$ ，故答案为: $\frac{5}{4}$ $\frac{5}{16}$

16. 设函数 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是单调函数， $\forall x \in (0, +\infty)$ ， $f[f(x) - e^x + x] = e$ ，若不等式 $f(x) + f'(x) \geq ax$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, 2e-1]$

【解析】由题意可设 $f(x) - e^x + x = t$ ，则 $f(x) = e^x - x + t$ ，

$\therefore f[f(x) - e^x + x] = e$ ，

$\therefore f(t) = e^t - t + t = e^t = e$ ，

$\therefore t = 1$ ，



$$\therefore f(x) = e^x - x + 1,$$

$$\therefore f'(x) = e^x - 1,$$

$$\text{由 } f(x) + f'(x) \geq ax \text{ 得 } e^x - x + 1 + e^x - 1 \geq ax,$$

$$\therefore a \leq \frac{2e^x}{x} - 1 \text{ 对 } x \in (0, +\infty) \text{ 恒成立,}$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{2e^x}{x} - 1, \quad x \in (0, +\infty), \text{ 则 } g'(x) = \frac{2e^x(x-1)}{x^2},$$

$$\text{由 } g'(x) = 0 \text{ 得 } x = 1,$$

$$\therefore g(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递减, 在 } (1, +\infty) \text{ 单调递增,}$$

$$\therefore g(x) \geq g(1) = 2e - 1,$$

$$\therefore a \leq 2e - 1, \quad \text{故答案为: } (-\infty, 2e - 1].$$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 已知 $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 展开式中前三项的二项式系数和为 22.

(1) 求 n 的值;

(2) 求展开式中的常数项.

【答案】(1) 6; (2) 常数项为 60.

【解析】(1) 因为 $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 展开式中前三项的二项式系数和为 22.

$$\text{所以 } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 22,$$

解得: $n = 6$ 或 $n = -7$ (舍去).

所以 n 的值为 6.

$$(2) \text{ 由通项公式 } T_{k+1} = C_6^k (2x)^{6-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = C_6^k 2^{6-k} x^{6-\frac{3k}{2}},$$

$$\text{令 } 6 - \frac{3k}{2} = 0, \text{ 可得: } k = 4,$$



所以展开式中的常数项为 $T_{4+1} = C_6^4 2^{6-4} x^0 = 60$.

18. 已知复数 $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 + 4i$, i 为虚数单位.

(1) 若复数 $z_1 + az_2$ 在复平面上对应的点在第四象限, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $z = \frac{z_1}{z_2}$, 求 z 的共轭复数 $\bar{z}$.

【答案】(1) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$; (2) $\bar{z} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.

【解析】(1) 由题意, 复数 $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 + 4i$,

则 $z_1 + az_2 = 1 - 2i + a(3 + 4i) = (1 + 3a) + (4a - 2)i$

因为复数 $z_1 + az_2$ 在复平面上对应的点在第四象限,

所以 $\begin{cases} 1 + 3a > 0 \\ 4a - 2 < 0 \end{cases}$, 解得 $-\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$, 即实数 a 取值范围 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

(2) 由 $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - 2i}{3 + 4i} = \frac{(1 - 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{-5 - 10i}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$, 所以 $\bar{z} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.

19. 某公司为提高市场销售业绩, 促进某产品的销售, 随机调查了该产品的月销售单价 x (单位: 元/件) 及相应月销量 y (单位: 万件), 对近 5 个月的月销售单价 x_i 和月销售量 y_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 的数据进行了统计, 得到如下表数据:

月销售单价 x_i (元/件)	9	9.5	10	10.5	11
月销售量 y_i (万件)	11	10	8	6	5

(I) 建立 y 关于 x 的回归直线方程;



(II) 该公司开展促销活动，当该产品月销售单价为 7 元/件时，其月销售量达到 18 万件，若由回归直线方程得到的预测数据与此次促销活动的实际数据之差的绝对值不超过 0.5 万件，则认为所得到的回归直线方程是理想的，试问：(I) 中得到的回归直线方程是否理想？

(III) 根据 (I) 的结果，若该产品成本是 5 元/件，月销售单价 x 为何值时（销售单价不超过 11 元/件），公司月利润的预计值最大？

参考公式：回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + a$ ，其中 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ 。

参考数据： $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 392$ ， $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 502.5$ 。

【答案】(I) $\hat{y} = -3.2x + 40$ (II) 可以认为所得到的回归直线方程是理想的。(III) 该产品单价定为 8.75 元时，公司才能获得最大利润

【解析】(I) 因为 $\bar{x} = \frac{1}{5}(11+10.5+10+9.5+9) = 10$ ， $\bar{y} = \frac{1}{5}(5+6+8+10+11) = 8$ 。

所以 $\hat{b} = \frac{392 - 5 \times 10 \times 8}{502.5 - 5 \times 10^2} = -3.2$ ，所以 $\hat{a} = 8 - (-3.2) \times 10 = 40$ ，

所以 y 关于 x 的回归直线方程为： $\hat{y} = -3.2x + 40$ 。

(II) 当 $x = 7$ 时， $\hat{y} = -3.2 \times 7 + 40 = 17.6$ ，则 $|17.6 - 18| = 0.4 < 0.5$ ，

所以可以认为所得到的回归直线方程是理想的。

(III) 设销售利润为 M ，则 $M = (x - 5)(-3.2x + 40) (5 < x \leq 11)$

$M = -3.2x^2 + 56x - 200$ ，所以 $x = 8.75$ 时， M 取最大值，

所以该产品单价定为 8.75 元时，公司才能获得最大利润。

20. 有 5 个男生和 3 个女生，从中选出 5 人担任 5 门不同学科的科代表，求分别符合下列条件的选法数。

- (1) 某女生一定担任语文科代表；
- (2) 某男生必须包括在内，但不担任语文科代表；
- (3) 某女生一定要担任语文科代表，某男生必须担任科代表，但不担任数学科代表。

【答案】(1) 840 种 (2) 3360 种 (3) 360 种



【解析】(1) 除去一定担任语文科代表的女生后，先选后排，共有不同选法 $C_7^4 \cdot A_4^4 = 840$ (种)。

(2) 先选后排，但先安排不担任语文科代表的该男生，所以共有不同选法 $C_7^4 \cdot C_4^1 \cdot A_4^4 = 3360$ (种)。

(3) 先从除去必须担任科代表，但不担任数学科代表的该男生和一定要担任语文科代表的该女生的 6 人中选 3 人有 C_6^3 种，再安排必须担任科代表，但不担任数学科代表的该男生有 C_3^1 种，其余 3 人全排列有 A_3^3 种，所以共有不同选法 $C_6^3 \cdot C_3^1 \cdot A_3^3 = 360$ (种)。

21. 一个袋中有 2 个红球，4 个白球。

(1) 从中取出 3 个球，求取到红球个数 X 的概率分布及数学期望；

(2) 每次取 1 个球，取出后记录颜色并放回袋中。

①若取到第二次红球就停止试验，求第 5 次取球后试验停止的概率；

②取球 4 次，求取到红球个数 Y 的概率分布及数学期望。

【答案】(1) 分布列见解析，1；(2) ① $\frac{32}{243}$ ；②分布列见解析， $\frac{4}{3}$ 。

【解析】(1) 取到红球个数 X 的可能取值为 0, 1, 2

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{C_2^0 \cdot C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \quad P(X=1) = \frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} = \frac{2 \times 6}{20} = \frac{3}{5}, \quad P(X=2) = \frac{C_2^2 \cdot C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5},$$

即分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\text{故数学期望为：} E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1;$$

(2) 设“取一次取出红球”为事件 A ，“取一次取出白球”为事件 B ，且 $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{2}{3}$ ，

①事件“前 4 次中恰有一次取出红球”记为 C ，且与“第 5 次取出红球”相互独立

$$\text{则若取到第二次红球就停止试验，第 5 次取球后试验停止的概率 } P = P(C)P(A) = C_4^1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{32}{243}$$



②取球 4 次，求取到红球个数 Y 可能取值为 0,1,2,3,4

$$\text{所以 } P(Y=0) = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}, \quad P(Y=1) = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81},$$

$$P(Y=2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}, \quad P(Y=3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81},$$

$$P(Y=4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$$

即分布列为：

Y	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$$\text{故数学期望为：} E(Y) = 0 \times \frac{16}{81} + 1 \times \frac{32}{81} + 2 \times \frac{8}{27} + 3 \times \frac{8}{81} + 4 \times \frac{1}{81} = \frac{4}{3}$$

22. 在微博知名美食视频博主李子柒的引领下，大家越来越向往田园生活，一大型餐饮企业拟对一个生态农家乐进行升级改造，加入量的农耕活动以及自己制作农产品活动，根据市场调研与模拟，得到升级改造投入 x （万元）与升级改造直接收益 Y （万元）的数据统计如下：

x	2	3	4	6	8	10	13	21	22	23	24	25
Y	13	22	31	42	50	56	58	68.5	68	67.5	66	66

当 $0 < x \leq 17$ 时，建立了 Y 与 x 的两个回归模型：模型①： $\hat{y} = 4.1x + 11.8$ ；模型②： $\hat{y} = 21.3\sqrt{x} - 14.4$ ；

当 $x > 17$ 时，确定 Y 与 x 满足的线性回归方程为： $\hat{y} = -0.7x + a$ 。

（I）根据下列表格中的数据，比较当 $0 < x \leq 17$ 时模型①、②的相关指数 R^2 ，并选择拟合精度更高、更可靠的模型，预测对生态园升级改造的投入为 17 万元时的直接收益。

回归模型	模型①	模型②
回归方程	$\hat{y} = 4.1x + 11.8$	$\hat{y} = 21.3\sqrt{x} - 14.4$



$\sum_{i=1}^7 (y_i - \hat{y}_i)^2$	182.4	79.2
------------------------------------	-------	------

(附：刻画回归效果的相关指数 $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ ， $\sqrt{17} \approx 4.1$.)

(II) 为鼓励生态创新，当升级改造的投入不少于 20 万元时，国家给予公司补贴收益 10 万元，以回归方程为预测依据，比较升级改造投 17 万元与 20 万元时公司实际收益的大小；

(附：用最小二乘法求线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的系数公式 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2}$ ，

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

【答案】(I) 模型①的 R^2 小于模型②，回归模型②刻画的拟合效果更好；预测值为 72.93 亿元；(II) 技术改造投入 20 亿元时，公司的实际收益的更大。

【解析】(1) 由表格中的数据，有 $182.4 > 79.2$ ，即 $\frac{182.4}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} > \frac{79.2}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2}$

所以模型①的 R^2 小于模型②，说明回归模型②刻画的拟合效果更好。

所以当 $x = 17$ 亿元时，科技改造直接收益的预测值为。

$$\therefore \hat{y} = 21.3 \times \sqrt{17} - 14.4 = 21.3 \times 4.1 - 14.4 = 72.93 \text{ (亿元)}$$

(2) 由已知可得： $\bar{x} - 20 = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ ，所以 $\bar{x} = 23$ 。

$$\bar{y} - 60 = \frac{85+8+7.5+6+6}{5} = 7.2，\text{所以 } \bar{y} = 67.2。$$

$$\therefore \hat{a} = \bar{y} + 0.7\bar{x} = 67.2 + 0.7 \times 23 = 83.3$$

所以当 $x > 17$ 亿元时， y 与 x 满足的线性回归方程为： $\hat{y} = -0.7x + 83.3$ 。

所以当 $x = 20$ 亿元时，科技改造直接收益的预测值 $\hat{y} = -0.7 \times 20 + 83.3 = 69.3$ 。

所以当 $x = 20$ 亿元时，实际收益的预测值为 $69.3 + 10 = 79.3$ 亿元

即 79.3 亿元 $>$ 72.93 亿元



所以技术改造投入 20 亿元时，公司的实际收益的更大。

