大值为

$$MA=\sqrt{3+\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{37}}{2},$$

$$PM=MA+2=\frac{\sqrt{37}}{2}+2,$$

从而$(x-\sqrt{3})^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$的最大值为

$$\left(\frac{\sqrt{37}}{2}+2\right)^2-\frac{13}{4}=10+2\sqrt{37},$$

于是$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的最大值$10+2\sqrt{37}$.

点评 解法1以$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$为基底,将$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$表示成$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{PA}$的关系式,当它们共线时取得最大,这是一个常规的思路;解法2中因为P是$\triangle ABC$所在平面内一点,且$AP=2$,故动点P是以A为圆心、2为半径的圆周上的点,放入直角坐标系中后,数量关系更加明显,最后转化为点点之间的最大距离问题.

一道最值题的研究

●戚有建 （扬州中学 江苏扬州 225000）

很多高考题、模考题看起来很平常,实际上却丰富多彩,有很大的研究空间和教学价值.本文从一道最值题出发,首先分析错误解法的原因,然后探讨多种正确解法,最后揭示题目的深刻背景.

1 题目展示

题目 已知实数a,c满足$a^2+c^2-ac=3$,求$2a+c$的最大值.

本题是一道高三期中考试题,是倒数第2个填空题,考查的是多元函数的最值问题.本题正确答案为$2\sqrt{7}$,阅卷结果如下:全班46人中14人正确,32人错误,其中做错的32人中有15人答案为$2\sqrt{6}$.

2 错解原因研究

由于有15人的答案都是$2\sqrt{6}$,看来此错误是个"共性"错误,必须分析原因并加以纠正,于是笔者向这部分学生详细了解了解题思路和过程,学生的具体解题过程如下:

由已知条件中$a^2+c^2-ac=3$的结构特征容易联想到基本不等式,因此很多学生想用基本不等式来求最值.因为

$$a^2+c^2-ac=3,$$

所以由基本不等式得

$$a^2+c^2=3+ac\geqslant 2ac,$$

解得
$$ac\leqslant 3,$$

从而
$$2a+c\geqslant 2\sqrt{2ac}\geqslant 2\sqrt{6},$$

于是$2a+c$的最大值为$2\sqrt{6}$.

点评 上面的解法中有2个错误:第一,本题是要求$2a+c$的最大值,而不等式$2a+c\geqslant 2\sqrt{2ac}$只能用来求最小值,不等式的方向反了;第二,不等式$ac\leqslant 3$与$2a+c\geqslant 2\sqrt{2ac}$中的等号不能同时取到,因此最后的等号是取不到的.

3 正确解法研究

本题入口较宽,解法灵活多样,可以从不同的角度切入,极具思维价值.

分析1 已知条件$a^2+c^2-ac=3$可以看作二次方程,只不过有2个变量,我们可以将其中一个看作主元,然后从一元二次方程的角度来考虑.

解法1 令$2a+c=m$,则

$$c=m-2a,$$

代入$a^2+c^2-ac=3$得

$$7a^2-5ma+m^2-3=0.$$

因为此方程有解,所以$\Delta\geqslant 0$,即

$$(5m)^2-28(m^2-3)\geqslant 0,$$

解得
$$-2\sqrt{7}\leqslant m\leqslant 2\sqrt{7},$$

因此$2a+c$的最大值为$2\sqrt{7}$.

分析2 观察已知式和目标式的次数特征,可以考虑比值换元.

解法2 当$a\neq 0$时,设$\frac{c}{a}=k$,即$c=ak$,代入$a^2+c^2-ac=3$,得

$$a^2(k^2-k+1)=3,$$

即
$$a^2=\frac{3}{k^2-k+1},$$

从而
$$(2a+c)^2=(2+k)^2a^2=\frac{3(2+k)^2}{k^2-k+1}=3\left(1+\frac{5k+3}{k^2-k+1}\right).$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

令$f(k)=3\left(1+\frac{5k+3}{k^2-k+1}\right)$,用导数可以求得

$$f(k)_{\max}=f\left(\frac{4}{5}\right)=28,$$

从而 $2a+c$ 的最大值为 $2\sqrt{7}$. 另外,当 $a=0$ 时,$c=\pm\sqrt{3}$,此时

$$2a+c=\pm\sqrt{3}<2\sqrt{7},$$

故 $2a+c$ 的最大值为 $2\sqrt{7}$.

点评　上面的解法中通过比值换元引入参数 k,将二元化归为一元,成功实现了减元,从而使得问题变得容易处理.

分析 3　观察已知条件 $a^2+c^2-ac=3$ 的结构特征,可以联想到余弦定理,问题转化为三角函数的最值问题.

解法 3　由于要求的是 $2a+c$ 的最大值,容易判断 a,c 都是正数时才可能取得最大值. 不妨设 a,c 都是正数,问题转化为:在 $\triangle ABC$ 中,$B=60°$,$b=\sqrt{3}$,求 $2a+c$ 的最大值.

根据正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,得

$$a=2\sin A,c=2\sin C,$$

从而

$$2a+c=4\sin A+2\sin C=4\sin A+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=5\sin A+\sqrt{3}\cos A=2\sqrt{7}\sin(A+\varphi),$$

其中 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{21}}{14}$,$\cos\varphi=\frac{5\sqrt{7}}{14}$,$0<A<\frac{2\pi}{3}$. 因此,$2a+c$ 的最大值为 $2\sqrt{7}$.

点评　本题本来是个代数最值问题,而上面的解法中将其转化为三角形中的三角函数最值问题,我们不禁会感叹这样的转化太精彩了,数学太精彩了! 实际上,这就是 2011 年全国数学高考试题的第 16 题:在 $\triangle ABC$ 中,$B=60°$,$AC=\sqrt{3}$,求 $AB+2BC$ 的最大值.

分析 4　观察已知条件 $a^2+c^2-ac=3$ 的结构特征,发现可以先配方然后用三角换元处理.

解法 4　由 $a^2+c^2-ac=3$ 得

$$\left(a-\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3c^2}{4}=3.$$

令 $a-\frac{c}{2}=\sqrt{3}\sin\alpha$,$\frac{\sqrt{3}}{2}c=\sqrt{3}\cos\alpha$,则

$$a=\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha,c=2\cos\alpha,$$

从而

$$2a+c=2\sqrt{3}\sin\alpha+4\cos\alpha=2\sqrt{7}\sin(\alpha+\varphi)\leqslant 2\sqrt{7},$$

故 $2a+c$ 的最大值为 $2\sqrt{7}$.

分析 5　观察已知条件 $a^2+c^2-ac=3$ 的结构特征,发现可以先配方然后用代数换元处理.

解法 5　由 $a^2+c^2-ac=3$ 得

$$\left(a-\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3c^2}{4}=3.$$

令 $a-\frac{c}{2}=x$,$\frac{c}{2}=y$,代入上式,得

$$\frac{x^2}{3}+y^2=1,$$

此时

$$2a+c=2x+4y,$$

问题转化为:已知$\frac{x^2}{3}+y^2=1$,求 $2x+4y$ 的最大值.

至此,处理方法就很多了,例如线性规划、三角换元、Δ 法等,最后可求得 $2a+c$ 的最大值为 $2\sqrt{7}$.

点评　解法 5 中通过换元将问题转化为圆锥曲线中的最值问题,这引起了我们的反思:二次方程 $a^2+c^2-ac=3$ 表示什么曲线呢? 是否就是椭圆?

4　背景研究

笔者借助几何画板画出了方程 $x^2+y^2-xy=3$ 表示的曲线,图像如图 1 所示,发现很像椭圆,只不过将标准状态下的椭圆进行了旋转而已.

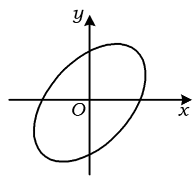

图 1

那么将此曲线旋转回标准状态,方程是什么? 是椭圆吗?

设点 $P(x,y)$ 是旋转前曲线上任一点,顺时针旋转 45°后的坐标为 $P'(x',y')$,则根据旋转公式得

$$\begin{cases}x=x'\cos45°-y'\sin45°;\\ y=x'\sin45°+y'\cos45°,\end{cases}$$

代入原方程 $x^2+y^2-xy=3$,得

$$\frac{x'^2}{6}+\frac{y'^2}{2}=1,$$

此时

$$2a+c=\frac{\sqrt{2}}{2}(3x'-y').$$

因此,本题的背景就是:已知 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$,求 $\frac{\sqrt{2}}{2}(3x-y)$的最大值.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net